

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ

ΠΟΛΥΤΕΧΝΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΟΛΟΓΩΝ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ ΒΙΟΜΗΧΑΝΙΑΣ

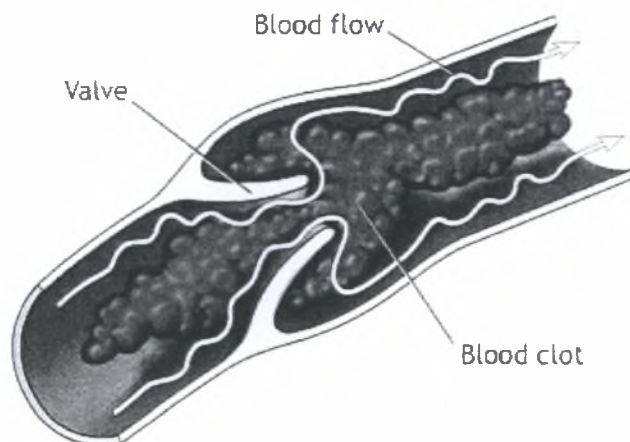
## Διπλωματική Εργασία

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΟΝΤΕΛΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

ΚΑΙ ΜΕΛΕΤΗ ΤΗΣ ΡΟΗΣ ΑΙΜΑΤΟΣ ΣΕ ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΑΡΤΗΡΙΑΚΕΣ ΣΤΕΝΩΣΕΙΣ

υπό

ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ Ν. ΒΛΑΧΑΚΗ



Υπεβλήθη για την εκπλήρωση μέρους των απαιτήσεων για την απόκτηση  
του Διπλώματος Μηχανολόγου Μηχανικού Βιομηχανίας

Ιούλιος 2004



**ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΘΕΣΣΑΛΙΑΣ**  
**ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗΣ & ΠΛΗΡΟΦΟΡΗΣΗΣ**  
**ΕΙΔΙΚΗ ΣΥΛΛΟΓΗ «ΓΚΡΙΖΑ ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ»**

Αριθ. Εισ.:	4025/1
Ημερ. Εισ.:	15-10-2004
Δωρεά:	Συγγραφέας
Ταξιθετικός Κωδικός:	ΠΤ – ΜΜΒ
	2004
	ΒΛΑ

© 2004 Βασίλειος Βλαχάκης

Η έγκριση της διπλωματικής εργασίας από το Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας της Πολυτεχνικής Σχολής του Πανεπιστημίου Θεσσαλίας δεν υποδηλώνει αποδοχή των απόψεων του συγγραφέα (Ν. 5343/32 αρ. 202 παρ. 2).

## Εγκρίθηκε από τα Μέλη της Τριμελούς Εξεταστικής Επιτροπής:

Πρώτος Εξεταστής (Επιβλέπων)	Δρ. Νικόλαος Βλάχος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Δεύτερος Εξεταστής	Δρ. Βασίλειος Μποντόζογλου Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας
Τρίτος Εξεταστής	Δρ. Νικόλαος Πελεκάσης Επίκουρος Καθηγητής, Τμήμα Μηχανολόγων Μηχανικών Βιομηχανίας, Πανεπιστήμιο Θεσσαλίας

## Ευχαριστίες

Πρώτα απ' όλα, θέλω να ευχαριστήσω τον επιβλέποντα της Διπλωματικής εργασίας μου και Διευθυντή του Εργαστηρίου Ρευστομηχανικής & Στροβιλομηχανών, Καθηγητή Νικόλαο Βλάχο, για την πολύτιμη βοήθεια, συμπαράσταση και καθοδήγησή του κατά τη διάρκεια της δουλειάς μου. Είναι ο άνθρωπος που μου έδωσε τις πρώτες βάσεις στον τομέα της ρευστομηχανικής και η συνεισφορά του είναι μεγάλη στην πρόοδο μου. Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τα άλλα δύο μέλη της εξεταστικής επιτροπής, τους καθηγητές Β.Μποντόζογλου και Ν.Πελεκάση για την τιμή που μου προσέφεραν να κρίνουν και να αξιολογήσουν την προσπάθεια μου.

Απο αυτή τη θέση θέλω να ευχαριστήσω τον καθηγητή μου Α.Σταματέλλο που στάθηκε δίπλα μου σε όλα τα προβλήματά μου στην πορεία ως σπουδαστή καθώς επίσης και τον καθηγητή Δ.Βαλουγεώργη που η συνεργασία μαζί του είχε σαν αποτέλεσμα την ανάπτυξη της μαθηματικής και 'υπολογιστικής' μου σκέψης. Ιδιαίτερα δεν θα ξεχάσω ποτέ τον Καθηγητή του ΕΜΠ Σ. Τσαγγάρη για την πολύτιμη βιβλιογραφία που μου υπέδειξε, διερευνώντας καλύτερα την θεματογραφία. Η συνεισφορά του υπήρξε πολύτιμη και καθοριστική για την επιλογή αυτού του νέου κλάδου που ονομάζεται Εμβιομηχανική και αναπτύσσεται στην παρούσα εργασία.

Ένα μεγάλο ευχαριστώ αξίζει στον Δρ Γιάννη Σαρρή και στον υποψήφιο διδάκτορα Χρήστο Δριτσέλη για την πολύτιμη βοήθειά και συνεισφορά τους κατά την διάρκεια της προσπάθειας μου. Επίσης δεν θα ξεχάσω ποτέ τους φίλους μου, Τάκη Βεργόπουλο, Κυριάκο Πέρρο, Πάνο Κουμουνδούρο, Μάνο Αλεξανδρόγλου, Δημόπουλο Δήμο και Θανάση Παπανικολάου καθώς επίσης και την Εύη Παπαλέξη για την ολόψυχη υποστήριξη τους και παρέα που τόσο απλόχερα μου προσφέρουν όλο αυτό τον καιρό που είμαστε μαζί.

Τέλος, επιθυμώ να τονίσω την ηθική και υλική υποστήριξη των γονιών μου, όπου η ευγνωμοσύνη μου είναι η ελάχιστη ανταπόδοση για την προσφορά τους.

Βασίλειος Ν. Βλαχάκης

*Αφιερώνεται στην γιαγιά μου Ελισάβετ Βλαχάκη*

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

### 1. ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ

1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής.....	1
1.2 Στόχοι της διπλωματικής εργασίας.....	2

### 2. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΙΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

2.1 Οι πρόοδοι της τεχνολογίας στην ιατρική.....	3
2.2 Ανατομία της καρδιάς.....	4
2.2.1 Εξωτερική ανατομία της καρδιάς.....	4
2.2.2 Θέση της καρδιάς .....	5
2.2.3 Τα χωρίσματα της καρδιάς.....	6
2.2.4 Οι βαλβίδες της καρδιάς.....	7
→ 2.2.5 Η κυκλοφορία του αίματος .....	11
2.2.6 Το καρδιοαγγειακό σύστημα του ανθρώπου.....	12
2.2.7 Η λειτουργία της καρδιάς.....	12
2.2.8 Ο καρδιακός κύκλος.....	13
→ 2.2.9 Η καρδιά ως κεντρική αντλία.....	15
2.3 Ρευστοδυναμική του αίματος (Αιμοδυναμική).....	18
→ 2.3.1 Τα αιμοφόρα αγγεία.....	18
→ 2.3.2 Σύνθεση του αίματος.....	20
→ 2.3.3 Νόσοι και παθήσεις αρτηριών.....	33

### 3. ΦΥΣΙΚΗ ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

3.1 Γεωμετρία του προβλήματος .....	36
3.2 Εξισώσεις ροής συνεχούς φάσης.....	36
3.2.1 Στρωτή ροή σε απότομες συστολές αγωγών.....	38

3.2.2 Αδιάστατες παράμετροι του προβλήματος.....	38
<b>3.3 Δυναμική σωματιδίων.....</b>	<b>39</b>
3.3.1 Δύναμη οπισθέλκουσας .....	40
3.3.2 Δυνάμεις επιτάχυνσης.....	41
3.3.3 Δυνάμεις ανύψωσης.....	42
3.3.4 Η εξίσωση Basset-Boussinesq-Oseen.....	43
3.3.5 Αδιάστατοι παράμετροι σωματιδίων.....	44
3.3.6 Αραιές και πυκνές ροές.....	45
3.3.7 Απόσταση σωματιδίων.....	48

## **4. ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ**

<b>4.1 Ο αλγόριθμος επίλυσης .....</b>	<b>49</b>
<b>4.2 Χωρική διακριτοποίηση .....</b>	<b>49</b>
4.2.1 Μετατοπισμένο πλέγμα (staggered grid).....	50
4.2.2 Διακριτοποίηση στην περιοχή του άξονα συμμετρίας .....	50
4.2.3 Διακριτοποίηση μη γραμμικών όρων συναγωγής.....	52
4.2.4 Διακριτοποίηση γραμμικών όρων διάχυσης.....	55
<b>4.3 Χρονική διακριτοποίηση.....</b>	<b>56</b>
<b>4.4 Παραγοντοποίηση των εξισώσεων ορμής.....</b>	<b>57</b>
<b>4.5 Υπολογισμός ψευδοπίεσης-Επίλυση της εξίσωσης Poisson.....</b>	<b>57</b>
<b>4.6 Επίλυση εξισώσεων σωματιδίων.....</b>	<b>59</b>
<b>4.7 Εσωτερικά εμπόδια.....</b>	<b>61</b>
<b>4.8 Περιγραφή της μεθόδου εμπλεγμένου συνόρου (immersed boundary).....</b>	<b>62</b>
<b>4.9 Μέθοδος υπολογισμού του όρου της δύναμης.....</b>	<b>63</b>
<b>4.10 Απευθείας δύναμη (Direct forcing).....</b>	<b>65</b>
<b>4.11 Μέθοδοι παρεμβολών.....</b>	<b>66</b>

<b>4.12 Μερικές υπολογιστικές λεπτομέρειες .....</b>	<b>67</b>
<b>4.13 Πιστοποίηση του κώδικα που χρησιμοποιήθηκε.....</b>	<b>71</b>
<b>5. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ</b>	
<b>5.1 Στοιχεία παραμετρικής μελέτης για την ροή χωρίς σωματίδια.....</b>	<b>72</b>
5.1.1 Αποτελέσματα περίπτωσης ( $h=0.1$ , $l=0.1$ , $Re=300$ ).....	73
5.1.2 Αποτελέσματα περίπτωσης ( $h=0.1$ , $l=0.1$ , $Re=50$ ).....	78
5.1.3 Αποτελέσματα περίπτωσης ( $h=0.2$ , $l=0.1$ , $Re=300$ ).....	83
5.1.4 Αποτελέσματα περίπτωσης ( $h=0.2$ , $l=0.1$ , $Re=50$ ).....	88
5.1.5 Αποτελέσματα περίπτωσης ( $h=0.3$ , $l=0.1$ , $Re=300$ ).....	95
5.1.6 Αποτελέσματα περίπτωσης ( $h=0.3$ , $l=0.1$ , $Re=50$ ).....	99
5.1.7 Αποτελέσματα περίπτωσης ( $h=0.1$ , $l=0.3$ , $Re=300$ ).....	104
5.1.8 Αποτελέσματα περίπτωσης ( $h=0.1$ , $l=0.3$ , $Re=50$ ).....	108
5.1.9 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα.....	119
5.1.10 Πίνακας αποτελεσμάτων.....	122
<b>5.2 Αποτελέσματα παραμετρικής μελέτης για ροή με σωματίδια.....</b>	<b>122</b>
5.2.1 Αποτελέσματα Περίπτωσης σωματιδίων ( $h=0.3$ , $l=0.1$ , $Re=300$ , $L=3\pi/4$ ).....	126
5.2.2 Αποτελέσματα Περίπτωσης σωματιδίων ( $h=0.3$ , $l=0.1$ , $Re=300$ , $L=\pi/8$ ).....	128
<b>6. ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ</b>	
<b>6.1 Συμπεράσματα.....</b>	<b>128</b>
6.1.1 Ροή αίματος μέσα από περιοδικές αρτηριακές στενώσεις.....	128
6.1.2 Συμπεράσματα για τις τροχιές των σωματιδίων.....	128
6.1.3 Συμπεράσματα για τον κώδικα.....	129
<b>6.2 Προτάσεις .....</b>	<b>129</b>
<b>ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ .....</b>	<b>130</b>



## ΑΝΤΙΚΕΙΜΕΝΟ ΚΑΙ ΣΤΟΧΟΙ ΤΗΣ ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗΣ

### 1.1 Αντικείμενο της διπλωματικής

Η **Βιοιατρική** τεχνολογία είναι η επιστήμη που ασχολείται με την εφαρμογή της τεχνολογίας στη Βιολογία και Ιατρική αλλά και συνδέεται με την προσπάθεια που γίνεται σήμερα για μετατροπή της Ιατρικής από εμπειρική σε ακριβή επιστήμη. Η **Βιορευστομηχανική** αποτελεί μια ειδική περιοχή της ευρύτερης επιστήμης της Βιοιατρικής τεχνολογίας. Ο διεπιστημονικός αυτός κλάδος προέκυψε από τα προβλήματα κατασκευής ιατρικών οργάνων, συσκευών και μηχανημάτων που χρησιμοποιούνται για διαγνωστικούς και θεραπευτικούς σκοπούς ή για την παρακολούθηση ασθενών στους χώρους παροχής υγειονομικής περίθαλψης καθώς και από τις βασικές λειτουργίες του ανθρώπινου σώματος. Ειδικά περιλαμβάνει εφαρμογές της Ρευστομηχανικής σε βιολογικά συστήματα όπως είναι το κυκλοφορικό σύστημα, ουροποιητικό, αναπνευστικό καθώς και τη συναφή τεχνολογία.

Η Βιορευστομηχανική επιδιώκοντας να δώσει μηχανική εξήγηση στην λειτουργία των ζώντων οργανισμών (Αριστοτέλης) συνδέει την φυσική των νόμων (Euler) με την φυσιολογία των μηχανισμών των «ζώντων σωμάτων» (von Helmholtz).

Στον Πίνακα 1 αναφέρονται τα πρώτα βήματα της πορείας σύνδεσης της Μηχανικής και Φυσιολογίας στην ανάπτυξη του καινοτόμου κλάδου της «Εμβιομηχανικής»

**Πίνακας 1 Ιστορική ανασκόπηση των βημάτων της Εμβιομηχανικής**

Ερευνητής	Ημερομηνία Συμβάντος	Θεματογραφία
Αριστοτέλης	350 π.Χ.	Φυσική της ζωής
Leonahard Euler	1775 μ.Χ.	Κυκλοφορικό σύστημα
Jean Poiseuille	1850 μ.Χ.	Μέτρηση πίεσης αορτής σκύλου
H. von Helmholtz	1880 μ.Χ.	Συσπάσεις μυών
H. Lamb	1898 μ.Χ.	Διάδοση παλμών στις αρτηρίες
O. Frank	1940 μ.Χ.	Υδροδυναμική του αίματος

## 1.2 Στόχοι της διπλωματικής εργασίας

Η εργασία αυτή έχει σκοπό να καλύψει ένα μικρό υποσύνολο της φυσιολογίας του κυκλοφορικού συστήματος του ανθρώπου. Δίνεται έμφαση κυρίως στη υδροδυναμική πλευρά που σχετίζεται με τη ροή του αίματος σε παθολογικές καταστάσεις σχηματισμού αρτηριακών στενώσεων. Οι φυσιολογικοί μηχανισμοί της κίνησης των διαφόρων σωματιδίων στο αίμα προσεγγίζονται μακροσκοπικά, ενώ περιγράφονται οι φαινομενολογικές συμπεριφορές των συστατικών του αίματος όταν μάλιστα συναντούν εμπόδια στα αρτηριακά τοιχώματα.

Η πρακτική πλευρά των προβλημάτων που αναφέρονται στη Βιορευστομηχανική είναι σημαντική αν μάλιστα ληφθεί υπόψη ότι τα θέματα αυτά είναι επιστημονικά επιτεύγματα των τελευταίων δεκαετιών που αποσκοπούν στην καλύτερη κατανόηση της ιατρικής μέσα από την σκοπιά της σύγχρονης τεχνολογίας.

Η ζωή γενικά, από την εμφάνιση της στον πλανήτη μας έχει μια αξιοθαύμαστη ικανότητα να προσαρμόζεται και να εξελίσσεται. Στην εκδήλωση αυτή οφείλονται οι ιδιότητες των μηχανισμών στην γενετική και παθοφυσιολογική συμπεριφορά των οργανισμών.

Η προσφορά της εργασίας αυτής συνίσταται στο να ταξινομήσει τους προβληματισμούς που προέρχονται από ένα απλό ερώτημα που έχει όμως μεγάλες επιπτώσεις στη καθημερινή πρακτική της ζωής : Τι ρόλο παίζουν οι αρτηριακές στενώσεις και ποια η απλουστευμένη εικόνα κινδύνου για έναν υγιή οργανισμό.

## 2 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΙΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗΣ

### 2.1 Οι πρόοδοι της τεχνολογίας στην Ιατρική

Η αντίδραση του κόσμου στα νέα επιτεύγματα της τεχνολογίας στην ιατρική και ο τρόπος που αυτά επηρεάζουν τη ζωή μας είναι παράμετροι που πρέπει να αξιοποιηθούν προς την κατεύθυνση της χάραξης πληροφόρησης για υγιή τρόπο διαβίωσης σε ένα πλανήτη που καθίσταται συνεχώς ανθυγιεινός για τους έμβιους οργανισμούς. Έτσι οι παρακάτω προβληματισμοί προκύπτουν από την πρόοδο της Ιατρικής Τεχνολογίας: Είναι τα νέα προϊόντα επικίνδυνα και τοξικά; Τα ιδιοσυσκευάσματα δημιουργούν αλλεργίες; Τι αποτελέσματα έχει μια κατάχρηση της νέας τεχνολογίας; Μπορεί να γίνει πατέντα η απομόνωση ενός γονιδίου; Σε ποιόν ανήκουν τα γονίδια του ανθρώπου – στην ερευνητική ομάδα η στον ίδιο τον άνθρωπο; Φυσιολογική ορμή του ανθρώπου αποτελεί η επιδίωξή του να επικαλείται όλες τις δυνάμεις εκείνες για να φθάσει στη τεχνολογική επανάσταση, να κατασκευάζει και να χειρίζεται τα όργανα του σώματός του ως εξαρτήματα για την παρέμβαση στο γενετικό του περιβάλλον. Η τεχνολογία πάντα γοήτευε όταν μάλιστα έδινε τη δυνατότητα για εκπλήρωση βαθυστόχαστων πόθων και επιθυμιών στη πάλη εναντίον ασθενειών και ατελειών του ανθρώπινου είδους.

Η τεχνολογία στην Ιατρική είναι τελικά εκείνο το κομμάτι των θέσεων και των στάσεων του ανθρώπου να εξισορροπήσει και να εναρμονίσει τη γνώση και τη πρόοδο με τις ανθρώπινες ανάγκες έτσι ώστε να διαμορφωθεί το ηθικό δέος στο. Οι καινούργιες δυνατότητες ιατρικών λύσεων είναι ένα χαρμόσυνο μήνυμα ότι η τεχνολογική πλευρά της Ιατρικής προσέφερε πολλά σε αυτό που σήμερα ονομάζεται Βιοϊατρική τεχνολογία.

Η ίδια η κοινωνική και οικονομική ανάπτυξη υιοθέτησε την πρόοδο στα μεγαλουργήματα της ιατρικής του έδωσε τη δυνατότητα στον πληθυσμό να αξιολογήσει και να ελέγξει τις διαδικασίες γενετικών επιλογών και βελτιώσεων στη φυσική και διανοητική απόδοση του ατόμου, στον επηρεασμό της γενετικής καταγραφής και βελτίωσης (Ευγονική)

Βασική αιτία απώλειας της ζωής είναι το έμφραγμα του μυοκαρδίου. Αυτό μπορεί να εκδηλωθεί ξαφνικά και να προκαλέσει στον ασθενή μόνιμη αναπηρία ή ακόμη και αιφνίδιο θάνατο. Προέρχεται από την ηλεκτρική αστάθεια στο μυοκάρδιο αμέσως μετά από μια απόφραξη της στεφανιαίας αρτηρίας. Το έμφραγμα του μυοκαρδίου έχει ως ηλεκτρικό ανάλογο

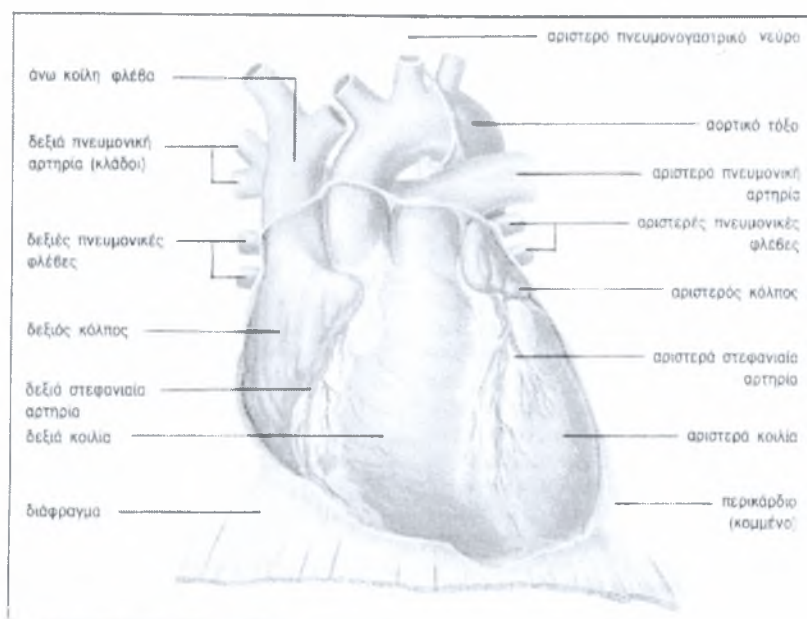
το ηλεκτρικό βραχυκύκλωμα που διακόπτει την ηλεκτρική λειτουργία της καρδιάς και μετά σταματά και τη μηχανική λειτουργία της. Πέρα από τη άμεση βοήθεια με ένα πολύ γερο κτύπημα στο κέντρο του στήθους (κτύπημα γροθιάς πυγμάχου) για να ξεκινήσει πάλι η αντλία-καρδιά, επιχειρούνται μαλάξεις μέχρι να διακομιστεί ο ασθενής σε νοσοκομείο.

Στοχοθεσία στην αποφυγή του κινδύνου είναι η μηχανική διάνοιξη της αρτηρίας ή και η χορήγηση θρομβολυτικών φαρμάκων μετά βέβαια από τη χορήγηση της γνωστής σε όλους ασπιρίνης που προκαλεί διάλυση του σχηματισθέντος θρόμβου, η οποία αποβλέπει στην επαναιμάτωση της περιοχής που έχει αποφραχθεί για να σταματήσει η περαιτέρω νέκρωση του μυοκαρδίου.

## 2.2 Ανατομία της καρδιάς

### 2.2.1 Εξωτερική ανατομία της καρδιάς

Η καρδιά περιβάλλεται από ένα ινώδες ορογόνο περίβλημα, το *περικάρδιο*. Η εσωτερική της επιφάνεια καλύπτεται από μια λεπτή, λεία μεμβράνη, το *ενδοκάρδιο*. Ο μυϊκός της χιτώνας ονομάζεται *μυοκάρδιο*. Η καρδιά αγγειώνεται από δύο αρτηρίες, τη δεξιά και την αριστερά στεφανιαία αρτηρία, που εκφύονται από την αορτή. Οι φλέβες της, που λέγονται επίσης στεφανιαίες, δεν είναι ομόλογες των αρτηριών και εκβάλλουν απευθείας στον δεξιό κόλπο. Τα νεύρα της καρδιάς προέρχονται από το καρδιακό πλέγμα που σχηματίζεται από κλάδους του πνευμονογαστρικού και του συμπαθητικού νεύρου. Στο Σχήμα 2.1 παρουσιάζεται μια εξωτερική άποψη της καρδιάς

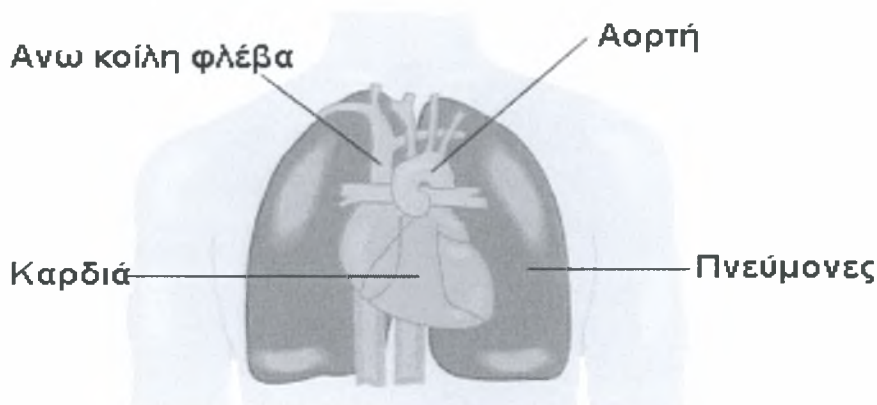


Εξωτερική άποψη της καρδιάς.

**Σχήμα 2.1 Εξωτερική ανατομία της καρδιάς**

### 2.2.2 Θέση της καρδιάς

Η καρδιά, είναι το κεντρικό όργανο της κυκλοφορίας του αίματος. Είναι ένα κοίλο μυώδες όργανο, που δέχεται το αίμα που προέρχεται από τις φλέβες και το ωθεί προς τις αρτηρίες.



**Σχήμα 2.2 Θέση της καρδιάς στο θώρακα**

Η καρδιά έχει μέγεθος περίπου γροθιάς και σχήμα κώνου, η βάση του οποίου βλέπει προς τα άνω και πίσω, η δε κορυφή διευθύνεται προς τα κάτω, εμπρός και αριστερά. Η καρδιά καταλαμβάνει το μεσαίο τμήμα της θωρακικής κοιλότητας, στον χώρο που χωρίζει τους δυο πνεύμονες. Έτσι, βρίσκεται εμπρός από την σπονδυλική στήλη, τον οισοφάγο και την κατιούσα αορτή. Είναι τοποθετημένη πίσω από το πρόσθιο θωρακικό τοίχωμα, στο οποίο προβάλλεται αντίστοιχα με την προκάρδιο χώρα. Η κορυφή της καρδιάς πάλλεται στο άνω χείλος του πέμπτου αριστερού πλευρικού χόνδρου, σε απόσταση οκτώ εκατοστών από την μεσότητα του στέρνου, δηλαδή λίγο χαμηλότερα και πιο μέσα από την θηλή του αριστερού μαστού (Σχήμα 2.2)

Το χρώμα της καρδιάς είναι βαθύ ερυθρό, αλλά η ομοιομορφία του χρώματος διακόπτεται από κίτρινες ραβδώσεις οι οποίες οφείλονται στη συσσώρευση λίπους. Περιβάλλεται από ένα υμένα με δύο φύλλα, το *περικάρδιο*, ενώ οι εσωτερικές της κοιλότητες καλύπτονται από μια λεπτή μεμβράνη, το *ενδοκάρδιο*. Ανάμεσα στο περικάρδιο και ενδοκάρδιο βρίσκεται το παχύτερο τοίχωμα της καρδιάς που ονομάζεται μυοκάρδιο και αποτελείται από δυνατές μυϊκές ίνες

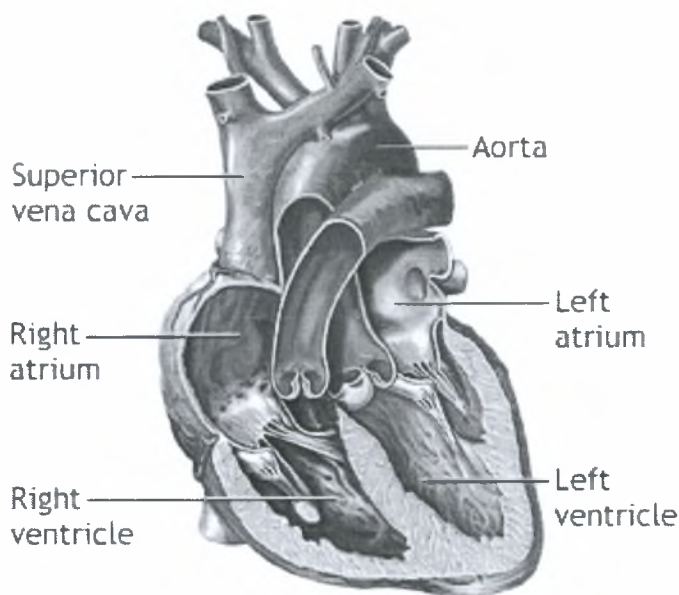
Ο όγκος της καρδιάς ποικίλλει στα διάφορα άτομα. Για έναν ενήλικα κατά μέσον όρο η καρδιά έχει μήκος 98 χιλιοστά., πλάτος 105 χιλιοστά, περιφέρεια 230 χιλιοστά και βάρος περίπου 275 γραμμάρια.

Η καρδιά της γυναίκας έχει διαστάσεις μικρότερες από του άνδρα κατά 5 - 10 χιλιοστά και ζυγίζει 5-10 γραμμάρια λιγότερο.

### 2.2.3 Τα χωρίσματα της καρδιάς

Εσωτερικά η καρδιά διαιρείται σε δύο σχεδόν όμοια τμήματα, ένα δεξιό και ένα αριστερό, τα οποία χωρίζονται μεταξύ τους με ένα μυώδες διάφραγμα που ονομάζεται *μεσοκοιλιακό διάφραγμα*. Το δεξί τμήμα περιέχει μη οξυγονωμένο αίμα σε αντίθεση με το αριστερό που περιέχει οξυγονωμένο αίμα. Αυτά τα δύο τμήματα δεν έχουν καμιά επικοινωνία το ένα με το άλλο, δηλαδή το αίμα του αριστερού τμήματος της καρδιάς δεν ανακατώνεται με το αίμα του δεξιού τμήματος. Κάθε ένα όμως από αυτά διαιρείται σε δύο κοιλότητες: την επάνω που ονομάζεται *κόλπος*, και την κάτω που λέγεται *κοιλία*. Σε αντίθεση με τα δύο τμήματα της καρδιάς ο κόλπος και η κοιλία της ίδιας πλευράς επικοινωνούν μεταξύ τους (Σχήμα 2.3)





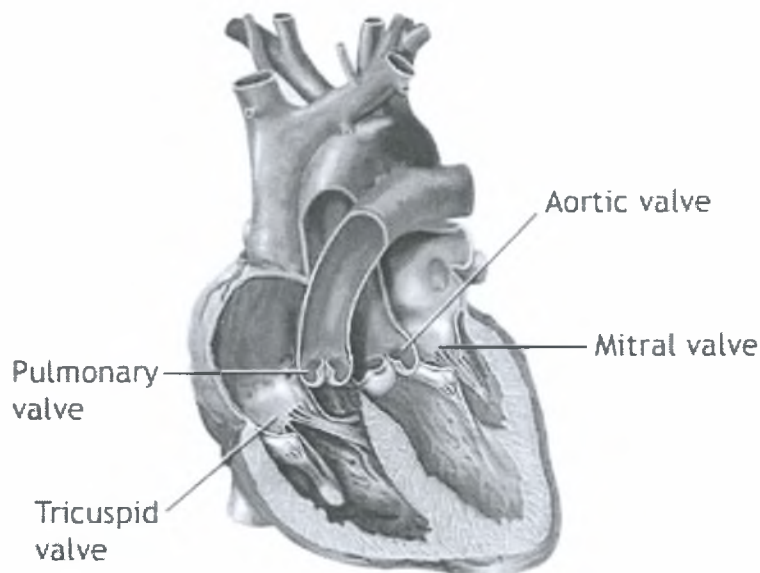
Αγγλική Ορολογία	Ελληνική Ορολογία
Right atrium	Δεξιός κόλπος
Left atrium	Αριστερός κόλπος
Right ventricle	Δεξιά κοιλία
Left ventricle	Αριστερή κοιλία
Aorta	Αορτή
Superior vena cava	Άνω κοίλη φλέβα

**Σχήμα 2.3 Κόλποι και κοιλίες της καρδιάς**

## 2.2.4 Οι βαλβίδες της καρδιάς

Οι δυο κοιλίες έχουν παχιά τοιχώματα και μορφή κώνου με την κορυφή προς τα κάτω. Οι βάσεις τους έχουν δύο ανοίγματα. Η εσωτερική επιφάνεια των κοιλιών παρουσιάζει προεξοχές, τους θηλοειδείς μύες, στους οποίους προσφύονται μικρές τενόντιες χορδές, που ρυθμίζουν το εύρος των κινήσεων της *μιτροειδούς* και της *τριγλώχινης* βαλβίδας.

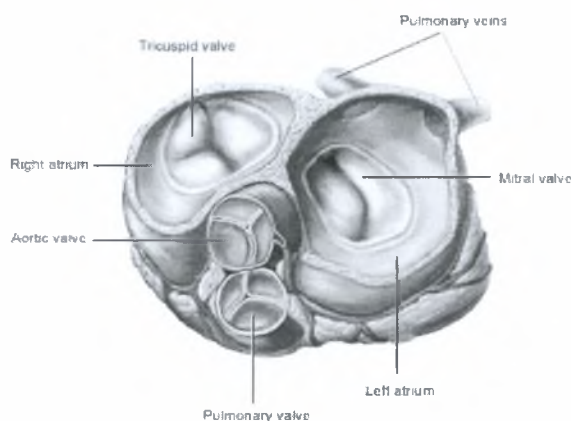
Οι κόλποι έχουν λεπτά τοιχώματα και σχήμα κύβου. Στην κάτω τους επιφάνεια βρίσκεται το κολποκοιλιακό στόμιο και στις άλλες τους επιφάνειες τα στόμια των φλεβών (πνευμονικές φλέβες στον αριστερό κόλπο, άνω και κάτω κοίλη φλέβα στον δεξιό κόλπο). Κάθε ένας από τους κόλπους παρουσιάζει μια μικρή επέκταση, που ονομάζεται καρδιακός ούς. Το Σχήμα 2.4 δείχνει τις τέσσερις βασικές βαλβίδες της καρδιάς.



Αγγλική Ορολογία	Ελληνική Ορολογία
Pulmonary valve	Πνευμονική βαλβίδα
Tricuspid valve	Τριγλώχινα βαλβίδα
Aortic valve	Αορτική βαλβίδα
Mitral valve	Μιτροειδής βαλβίδα

**Σχήμα 2.4 Βαλβίδες της καρδιάς**

Επίσης, μία όψη των τεσσάρων βασικών βαλβίδων της καρδιάς σε τομή φαίνονται στο Σχήμα 2.5



**Σχήμα 2.5 Τομή στο μέσον των βαλβίδων της καρδιάς**



### Δεξιός κόλπος

Ο δεξιός κόλπος δέχεται την κάτω κοίλη φλέβα που μεταφέρει στη καρδιά το αίμα από το κεφάλι και τα άνω άκρα, καθώς και την άνω κοίλη φλέβα, που μεταφέρει το αίμα από το κάτω τμήμα του σώματος. Ο δεξιός κόλπος συγκοινωνεί με τη δεξιά κοιλία μέσω του δεξιού κολποκοιλιακού στομίου. Το στόμιο αυτό είναι εφοδιασμένο με μια βαλβίδα που ονομάζεται **τριγλώχινα** επειδή αποτελείται από τρία τριγωνικά βαλβιδικά τμήματα (γλωχίνες), (Σχήμα 2.6) Η λειτουργία της βαλβίδας είναι να επιτρέπει τη διόδο του αίματος από τον κόλπο στην κοιλία και να εμποδίζει την επαναφορά του αίματος από την κοιλία στον κόλπο.



**Σχήμα 2.6 Τριγλώχινα βαλβίδα**

### Δεξιά κοιλία

Η δεξιά κοιλία δέχεται το αίμα από τον δεξιό κόλπο μέσω τριγλώχινος βαλβίδας. Από την δεξιά κοιλία αρχίζει η πνευμονική αρτηρία η οποία μεταφέρει το αίμα στους πνεύμονες. Η δεξιά κοιλία και η πνευμονική αρτηρία επικοινωνούν μέσω της **πνευμονικής βαλβίδας**, (Σχήμα 2.7 ) η οποία εμποδίζει το αίμα να επιστρέψει από την πνευμονική αρτηρία στην δεξιά κοιλία



**Σχήμα 2.7 Πνευμονική βαλβίδα**

### Αριστερός κόλπος

Ο αριστερός κόλπος δέχεται το αίμα από τις τέσσερες πνευμονικές φλέβες και επικοινωνεί με την αριστερά κοιλία μέσω του αριστερού κολποκοιλιακού στομίου. Και στο σημείο αυτό υπάρχει μια βαλβίδα που ονομάζεται **μιτροειδής βαλβίδα**, (Σχήμα 2.8) και αποτελείται από δύο μόνο τριγωνικά βαλβιδικά τμήματα. Η βαλβίδα αυτή λέγεται μιτροειδής επειδή έχει σχήμα ανεστραμμένης επισκοπικής μίτρας.



**Σχήμα 2.8 Μιτροειδής βαλβίδα**

### Αριστερή κοιλία

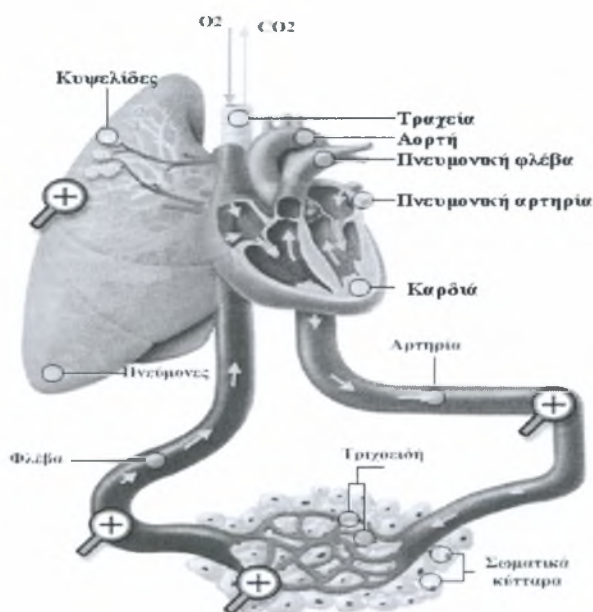
Η αριστερή κοιλία δέχεται το αίμα από τον αριστερό κόλπο μέσω της μιτροειδούς βαλβίδας. Από την αριστερά κοιλία αρχίζει η μεγαλύτερη αρτηρία του ανθρώπινου οργανισμού, η αορτή. Το στόμιο της αορτής κλείνει και αυτό όπως και της πνευμονικής με μια βαλβίδα, που ονομάζεται **αορτική βαλβίδα**, (Σχήμα 2.9) και διαθέτει τρεις μικρές μηννοειδείς (ημισεληνοειδείς) υμενώδεις πτυχές, σαν φωλιές περιστεριού, τις μηννοειδείς βαλβίδες. Η λειτουργία που επιτελεί είναι ίδια με την λειτουργία της βαλβίδας της πνευμονικής αρτηρίας, δηλαδή εμποδίζει την επιστροφή του αίματος από την αορτή στην κοιλία.



**Σχήμα 2.9 Αορτική βαλβίδα**

### 2.2.5 Η κυκλοφορία του αίματος

Στην ενότητα αυτή περιγράφεται η κυκλοφορία του αίματος στην καρδιά. Το φλεβικό αίμα, που παραλαμβάνει τις άχρηστες ουσίες από τα κύτταρα του ανθρώπινου οργανισμού συγκεντρώνεται στην κάτω και την άνω κοίλη φλέβα οι οποίες εκβάλλουν χωριστά ή καθεμιά στο δεξιό κόλπο. Από τον δεξιό κόλπο το αίμα περνά στη δεξιά κοιλία και από εκεί στην πνευμονική αρτηρία ή οποία και το μεταφέρει στους πνεύμονες. Εδώ το αίμα αποβάλλει το διοξείδιο του άνθρακος και πλουτίζεται με οξυγόνο. Έτσι από φλεβικό γίνεται αρτηριακό, και μέσω των πνευμονικών φλεβών επιστρέφει στον αριστερό κόλπο και κατεβαίνει στην αριστερά κοιλία. Από εκεί, μέσω της αορτής, μεταφέρεται σε ολόκληρο το σώμα αφήνοντας το οξυγόνο και τις θρεπτικές ουσίες και παραλαμβάνοντας τα άχρηστα προϊόντα και το διοξείδιο του άνθρακος, δηλαδή γίνεται ανταλλαγή ύλης. Έπειτα το αίμα επιστρέφει σαν φλεβικό στις φλέβες και συγκεντρώνεται τελικά στην άνω και την κάτω κοίλη φλέβα για να αρχίσει ο κύκλος και πάλι. Η κυκλοφορία του αίματος φαίνεται στο Σχήμα 2.10



Σχήμα 2.10 Η κυκλοφορία του αίματος

## 2.2.6 Το καρδιαγγειακό σύστημα του ανθρώπου

Το καρδιαγγειακό σύστημα του ανθρώπου είναι ένα κλειστό σύστημα σωλήνων, στο οποίο το αίμα προωθούμενο από τη μυώδη καρδιά, ρέει δια μέσου των αγγείων προς και από όλα τα σημεία του ανθρώπινου σώματος. Δύο κυκλώματα, ένα που ονομάζεται πνευμονικό και ένα άλλο συστηματικό, αποτελούνται από αρτηριακά τριχοειδή και φλεβικά αγγεία.

Η κύρια λειτουργία της καρδιάς είναι να χρησιμεύει ως αντλία που προωθεί το αίμα προς τα αγγεία και δια μέσου αυτών προς και από όλα τα μέρη του ανθρώπινου σώματος. Οι αρτηρίες, οι οποίες λαμβάνουν αυτό το αίμα με υψηλή πίεση και ταχύτητα και το οδηγούν σε ολόκληρο το σώμα, έχουν παχιά τοιχώματα με ελαστικό ινώδη ιστό και μυϊκά κύτταρα. Το αρτηριακό δέντρο (το σύστημα διακλάδωσης των αρτηριών) καταλήγει σε μικρά, στενά, μυώδη αγγεία που ονομάζονται αρτηρίδια, από τα οποία το αίμα εισέρχεται σε απλά σωληνάκια που σχηματίζονται από ενδοθηλιακά κύτταρα, τα τριχοειδή αγγεία. Αυτά τα μικροσκοπικά λεπτά τριχοειδή αγγεία είναι διαπερατά από τις θρεπτικές ουσίες απαραίτητες για τα κύτταρα και από άχρηστα προϊόντα που παράγονται από αυτά και χρησιμεύουν ως σημεία διανομής για τα θρεπτικά συστατικά και υποδοχής για τα άχρηστα προϊόντα. Από τα τριχοειδή αγγεία το αίμα, που του έχει αφαιρεθεί το οξυγόνο ενώ του έχουν προστεθεί τα άχρηστα προϊόντα, κινούμενο πιο αργά και υπό χαμηλή πίεση, εισέρχεται σε μικρά αγγεία, που ονομάζονται φλεβίδια και συγκλίνουν για να σχηματίσουν τις φλέβες, οι οποίες οδηγούν τελικά το αίμα πίσω στην καρδιά.

## 2.2.7 Λειτουργία της καρδιάς

Η βασική λειτουργία της καρδιάς είναι να ωθεί, μέσω μεγάλων αρτηριών, πλούσιο σε οξυγόνο και θρεπτικά συστατικά αίμα σε όλο το σώμα. Όταν το οξυγόνο απορροφηθεί από τους ιστούς, οι φλέβες παραλαμβάνουν το αίμα με χαμηλή περιεκτικότητα σε οξυγόνο (σκούρο κόκκινο) και το μεταφέρουν πίσω στην καρδιά. (Σχήμα 2.11). Η καρδιά έχει δύο τμήματα, καθένα από τα οποία λειτουργεί ως ξεχωριστή αντλία. Τα δυο αυτά τμήματα με τη σειρά τους χωρίζονται σε δύο θαλάμους - έτσι δημιουργούνται τέσσερις συνολικάθάλαμοι. Οιθάλαμοι που βρίσκονται προς τα πάνω λέγονται κόλποι και δρουν ως συλλέκτες αίματος, ενώ οι κάτω λέγονται κοιλίες και δρουν ως προωθητήρες. Το δεξιό τμήμα της καρδιάς δέχεται αίμα από τις φλέβες όλου του σώματος και το ωθεί στους πνεύμονες, για να οξυγονωθεί και πάλι. Η αριστερή

πλευρά συγκεντρώνει το αίμα που επιστρέφει από τους πνεύμονες και το ωθεί στους ιστούς όλου του σώματος, για να τους εφοδιάσει με αίμα. Για να φθάσει το αίμα σε όλα τα όργανα και τους μυς, πρέπει να ωθείται με μεγάλη πίεση - αν ποτέ κόψατε μια αρτηρία, σίγουρα θα έχετε δει το αίμα να ξεπηδά σαν πίδακας εξαιτίας της! Ο καρδιακός μυς είναι αρκετά δυνατός για να ασκεί αυτήν τη λειτουργία και, σε αντίθεση με τους μυς των ποδιών, δεν κουράζεται. Ωστόσο, χρειάζεται και ο ίδιος πολύ καλή παροχή αίματος - ένα έργο που επιτελούν οι στεφανιαίες αρτηρίες και οι κλάδοι τους.

### 2.2.8 Καρδιακός κύκλος

Η δράση της καρδιάς οφείλεται στις πιέσεις που δημιουργούνται στο εσωτερικό των κοιλοτήτων της, είναι δε τέτοιες, ώστε το περιεχόμενο αίμα να ρέει χωρίς παλινδρόμηση από την περιοχή των υψηλότερων πιέσεων προς την περιοχή των χαμηλότερων πιέσεων. Οι πιέσεις αυτές δημιουργούνται από τις συστολές της καρδιάς. Η περίοδος χαλάρωσης της καρδιάς ονομάζεται *διαστολή*. Η καρδιακή συστολή αρχίζει από την περιοχή που εκβάλλουν οι κοίλες φλέβες στην καρδιά και στην συνέχεια διαδίδεται στους κόλπους και στις κοιλίες. Το σύνολο των συνεργικών δράσεων κατά τον εγκάρσιο άξονα και των διαδοχικών δράσεων κατά τον επιμήκη άξονα της καρδιάς, οι οποίες παράγονται ύστερα από ένα ηλεκτροφυσιολογικό φαινόμενο στο τοίχωμα του δεξιού κόλπου και διαρκούν έως την επανάληψη του φαινομένου αυτού, αποτελεί έναν *καρδιακό κύκλο*.

Ας παρακολουθήσουμε πως διαδέχεται η μία φάση την άλλη στον καρδιακό κύκλο. Ο δεξιός κόλπος δέχεται το αίμα των κοίλων φλεβών και ο αριστερός κόλπος το αίμα των πνευμονικών φλεβών. Οι κόλποι συστέλλονται (*κολπική συστολή*) και το αίμα ωθείται προς τις κοιλίες. Το αίμα που ωθείται, εξ αιτίας της κολπικής συστολής στις κοιλίες, προκαλεί το άνοιγμα των κολποκοιλιακών βαλβίδων οι οποίες κλείνουν μόλις τελειώσει ή κολπική συστολή.

Μετά συσπώνται οι κοιλίες και το αίμα ωθείται προς τις αρτηρίες (πνευμονική αρτηρία από τη δεξιά κοιλία, αορτή από την αριστερά κοιλία) αφού προηγουμένως έχουν ανοίξει οι μηννοειδείς βαλβίδες (πνευμονική και αορτική βαλβίδα). Κατά τη φάση αυτή είναι απαραίτητο το κλείσιμο των κολποκοιλιακών βαλβίδων γιατί αλλιώς το αίμα θα επανερχόταν στους κόλπους.

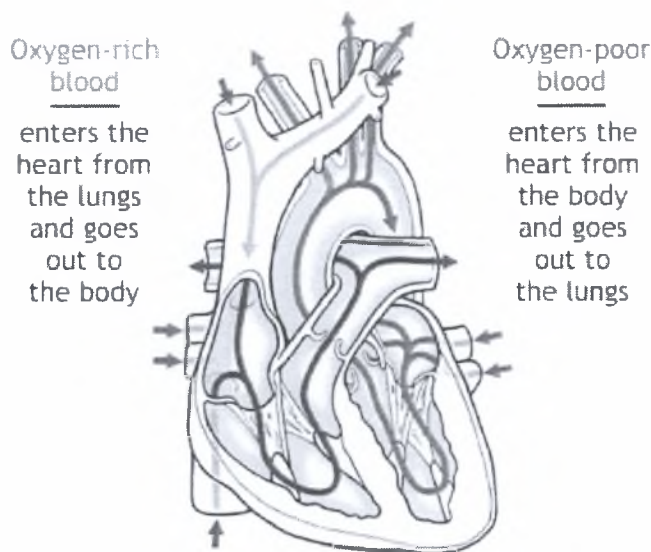


Όταν τελειώσει η κοιλιακή συστολή οι μηννοειδείς βαλβίδες κλείνουν, για να εμποδίσουν το αίμα να επανέλθει στις κοιλίες. Έτσι φθάνουμε στην τρίτη φάση, την καρδιακή ανάπαυλα που είναι φάση ανασυγκροτήσεως, και κατά την οποία η καρδιά ξεκουράζεται. Σε ένα λεπτό γίνονται κατά μέσον όρο 80 καρδιακές συστολές.

Κατά την συστολή των κόλπων οι κοιλίες της καρδιάς βρίσκονται σε διαστολή και αντίστροφα. Η καρδιά, λοιπόν, συσπάται στο πάνω μισό μέρος (κόλποι) και διευρύνεται στο κάτω μισό (κοιλίες). Αυτό γίνεται κατά την πρώτη φάση, όταν δηλαδή το αίμα περνά από τους κόλπους στις κοιλίες. Στην δεύτερη φάση το αίμα περνά στις αρτηρίες και οι κόλποι δέχονται καινούργιο αίμα, γίνεται το αντίθετο, συσπάται το κάτω τμήμα, (κοιλίες) και διευρύνεται το πάνω μισό μέρος, (κόλποι)

Οι καρδιακές συστολές ενεργοποιούνται από το ενδογενές νευρικό σύστημα της καρδιάς που της εξασφαλίζει λειτουργική αυτονομία. Ρυθμίζονται όμως από το εξωγενές νευρικό της σύστημα (καρδιακό πλέγμα), το οποίο τους μεταδίδει διεγέρσεις από ανώτερα νευρικά κέντρα (προμήκης μυελός), που ρόλος τους είναι και η προσαρμογή του εύρους και της συχνότητας των συστολών προς τις ανάγκες του οργανισμού για αίμα.

Από τον καρδιακό κύκλο μπορεί να ακουστεί φυσιολογικά μόνο ο ήχος από την σύγκλιση των βαλβίδων. Στην ακρόαση της καρδιάς ξεχωρίζει ένας βαθύς πρώτος τόνος, που δηλώνει την έναρξη της συστολής και αντιστοιχεί στη σύγκλιση των κολποκοιλιακών βαλβίδων (μιτροειδούς και τριγλώχινος). Περιγράφεται ακουστικά σαν 'lub'. Ακολουθεί μια μικρή σιγή, που καλύπτει τη συστολή, και τελειώνει με έναν οξύτερο δεύτερο τόνο 'dub', ο οποίος αντιστοιχεί στη σύγκλιση της αορτικής και της πνευμονικής βαλβίδας, που σημαίνει το τέλος της συστολής και την έναρξη της διαστολής. Ακολουθεί μια μεγάλη σιγή, που καλύπτει τη διαστολή και η οποία τελειώνει με έναν πρώτο τόνο, με τον οποίο ο καρδιακός κύκλος ξαναρχίζει.



**Σχήμα 2.11 Κυκλοφορία του αίματος στην καρδιά**

### **2.2.9 Η καρδιά ως κεντρική αντλία**

Το έργο της κίνησης του αίματος μέσα στο κυκλοφορικό σύστημα εξαρτάται σε μεγάλο βαθμό από τις δύο κεντρικές αντλίες, το δεξιό και το αριστερό μέρος της καρδιάς, που δουλεύουν ταυτόχρονα αλλά ανεξάρτητα το ένα από το άλλο. Το έργο της καρδιάς είναι σημαντικό: σε ένα μέσο ενήλικα άνδρα κάθε κοιλία αντλεί 6 λίτρα αίματος ανά λεπτό (περίπου 5 στην γυναίκα) ή 720 λίτρα ανά ώρα ή 8.640 λίτρα ανά εικοσιτετράωρο. Επειδή το έργο που εκτελείται από μια καταθλιπτική αντλία είναι κατά προσέγγιση το γινόμενο της παροχής επί την πίεση, το αριστερό μέρος της καρδιάς διατηρεί την υψηλή πίεση στην μεγάλη κυκλοφορία. Έτσι, εκτελείται έργο πέντε φορές περίπου μεγαλύτερο από το δεξιό μέρος της καρδιάς, που είναι ένα σύστημα χαμηλής πίεσης. Συνεπώς, ο αριθμός των μυϊκών κυττάρων της αριστερής κοιλίας είναι αναλογικά μεγαλύτερος από της δεξιάς κοιλίας και ο μυς είναι παχύτερος. Ο μηχανισμός αντλίας της καρδιάς εξαρτάται από την ρυθμική συστολή των δυο κοιλιών, που ακολουθείται από τη διαστολή τους. Η συστολή των μυών των κοιλιών ελαττώνει το μέγεθος των κοιλοτήτων τους, εξωθώντας το περιεχόμενο αίμα στα δύο αρτηριακά στελέχη (στην αορτή από την αριστερή κοιλία και στην πνευματική αρτηρία από την δεξιά κοιλία). Η διαστολή των μυών αυτών αυξάνει στις κοιλίες από τους κόλπους (επάνω καρδιακοί χώροι). Οι δύο κόλποι συστέλλονται επίσης ρυθμικά, αλλά η δράση τους, σαν αντλίες αποτελεί βοηθητικό μόνο παράγοντα στην διέγερση της πληρώσεως των κοιλιών.

Η καρδιά αποτελείται κατά μεγάλο μέρος από μυϊκά κύτταρα που έχουν συστολικές ιδιότητες, δηλαδή την ικανότητα, αντιδρώντας σε ένα ερέθισμα, να μικραίνουν το μήκος τους και να αναπτύσσουν έτσι σημαντική δύναμη. Εκτός από τον μεγάλο αριθμό των καρδιακών αυτών κυττάρων, η καρδιά περιέχει και έναν τύπο μυϊκού κυττάρου, που παρέχει μόνο του ρυθμικές διεγέρσεις. Τα κύτταρα αυτά είναι συγκεντρωμένα σε ομάδες και αποτελούν ευδιάκριτους σχηματισμούς στην εσωτερική επιφάνεια της καρδιάς. Το ολικό άθροισμα των σχηματισμών αυτών ονομάζεται ερεθισματοαγωγό σύστημα και αποτελείται από: α) το φλεβόκομβο Keith-Flack, β) αφανείς οδούς που μεταφέρουν τις διεγέρσεις κατά μήκος του κολπικού τοιχώματος, γ) τον κολποκοιλιακό κόμβο Aschoff-Tawara, δ) το δεμάτιο του His , ε) τα σκέλη του δεματίου του His και τις διακλαδώσεις τους, και στ) το δίκτυο των κυττάρων του Purkinje

Ο φλεβόκομβος Keith-Flack είναι ένας μικρός σχηματισμός που βρίσκεται στον δεξιό κόλπο, κοντά στην εκβολή της άνω κοίλης φλέβας. Οι οδοί της αγωγής των διεγέρσεων στον κόλπο είναι μικροσκοπικοί σχηματισμοί και πρόσφατα μόνο αναγνωρίστηκαν.

Ο κολποκοιλιακός κόμβος Aschoff-Tawara είναι ένας φιαλοειδής σχηματισμός , ο οποίος βρίσκεται εκεί που συνδέονται το μεσοκολπικό διάφραγμα (χώρισμα μεταξύ των κόλπων) και το οπίσθιο τοίχωμα του δεξιού κόλπου, κοντά στην έκφυση του στεφανιαίου κόλπου. Από τον κόμβο εκπορεύεται το δεμάτιο του His, διαμέτρου 2-4 χιλιοστών και μήκος περίπου 2 εκατοστών του μέτρου, που πορεύεται κατά μήκος του μεσοκολπικού διαφράγματος για να εισέλθει τελικά στο μεσοκοιλιακό διάφραγμα, όπου διαιρείται τελικά στα δύο ίσα σκέλη του. Το αριστερό σκέλος του δεματίου πορεύεται κατά μήκος του μεσοκοιλιακού διαφράγματος προς την αριστερή κοιλία, για μικρή απόσταση και στην συνέχεια διαιρείται σε δύο κλάδους, που κάθε ένας τους υποδιαιρείται με την σειρά του σε μικρότερους. Το δεξιό σκέλος του δεματίου πορεύεται κατά μήκος του μεσοκοιλιακού τοιχώματος της δεξιάς κοιλίας, χωρίς να υποδιαιρείται, έως την κορυφή της καρδιάς, όπου εμφανίζονται πολλοί δευτερεύοντες κλάδοι. Οι τελικές υποδιαιρέσεις των κλάδων των δύο δεματίων συνδέονται με ένα λεπτό δίκτυο ινών, το δίκτυο του Purkinje, που καλύπτεται από την εσωτερική επένδυση (ενδοθήλιο) των δύο κοιλιών. Το δίκτυο αυτό μεταβιβάζει το μεταφερόμενο ερέθισμα στον μύ, προκαλώντας την συστολή του.

Τα εξειδικευμένα μυϊκά κύτταρα του ερεθισματοαγωγού συστήματος διαφέρουν ως προς τις φυσιολογικές ιδιότητες από τα υπόλοιπα κύτταρα του μυοκαρδίου σε δύο χαρακτηριστικά: α)



είναι ικανά για αυτοδιέγερση, δηλαδή παράγουν ρυθμικές διεγέρσεις, και β) είναι ικανά να μεταφέρουν τις διεγέρσεις αυτές με μεγάλη ταχύτητα.

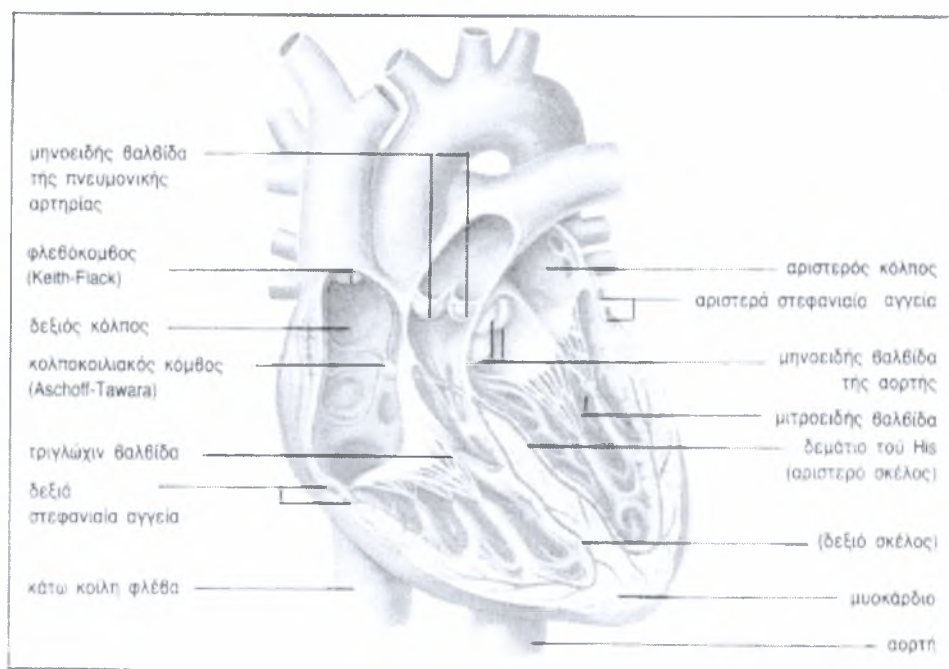
Ο φλεβόκομβος έχει τη μεγαλύτερη συχνότητα παραγωγής διεγέρσεων. Είναι ο πρωτεύων βηματοδότης, όπου υπό φυσιολογικές συνθήκες παράγεται ο καρδιακός παλμός. Ο κόμβος αυτός εφοδιάζεται πλούσια με απολήξεις του αυτόνομου νευρικού συστήματος, που μπορούν να μεταβιβάσουν σήματα, επιταχύνοντας ή επιβραδύνοντας τη βασική συχνότητα (70 περίπου παλμοί ανά λεπτό) που παράγεται από τα κύτταρα του φλεβόκομβου. Με την ανασταλτική επίδραση του παρασυμπαθητικού σκέλους του αυτόνομου νευρικού συστήματος, η συχνότητα μπορεί να επιβραδυνθεί μέχρι 40 περίπου παλμούς ανά λεπτό. Η επίδραση του συμπαθητικού μπορεί να επιταχύνει τον βηματοδότη έως την συχνότητα των 180 περίπου παλμών ανά λεπτό. Η επικρατούσα επίδραση είναι του συμπαθητικού νευρικού συστήματος (επιταχυντικά νεύρα), που επιταχύνει την καρδιακή λειτουργία κατά τη διάρκεια σωματικών ασκήσεων, μιας ζωηρής συγκίνησης, του πυρετού και ως αντίδραση σε πολλά άλλα ερεθίσματα.

Ο κολποκοιλιακός κόμβος έχει επίσης ένα φυσικό ρυθμό. Η παραγωγή διεγέρσεων γίνεται από αυτόν με συχνότητα 50 παλμών ανά λεπτό, αλλά η ερεθισματοπαραγωγική αυτή λειτουργία δεν χρησιμοποιείται σε φυσιολογικές συνθήκες. Είναι ένας εφεδρικός βηματοδότης, έτοιμος να αναλάβει την ρυθμική λειτουργία της καρδιάς, μόνον αν ο φλεβόκομβος πάψει να εργάζεται ή επιβραδυνθεί σημαντικά. Ο κύριος λόγος ύπαρξης του έγκειται στην αγωγή των διεγέρσεων που έρχονται από επάνω και στην καθυστέρησή τους, για να επιτρέψει καλό συντονισμό μεταξύ της συστολής των κόλπων και των κοιλιών. Συγκρατεί επίσης (σε μια διεργασία που την ονομάζουν μερικές φορές φαινόμενο διαλογής) μερικές ανεπιθύμητες ή υπερβολικές διεγέρσεις, που θα μπορούσαν αλλιώς να φτάσουν στις κοιλίες.

Το δεμάτιο του His, οι κλάδοι των σκελών του και το δίκτυο του Purkinje έχουν το δικό τους αυτοματισμό, που είναι όμως πολύ βραδύς, περίπου 30-40 παλμοί ανά λεπτό. Αποτελούν την τελευταία γραμμή άμυνας, αρχίζοντας αργές συστολές των κοιλιών όταν και οι δύο ανώτεροι κόμβοι παύουν να λειτουργούν ή όταν το κοιλιακό δίκτυο αποσυνδέεται από τους κόλπους (καρδιακός αποκλεισμός).

Η φυσιολογική διέγερση, που αρχίζει στον φλεβόκομβο, ενεργοποιεί τους κόλπους, προκαλώντας την συστολή τους ύστερα από 0.02 δευτερόλεπτα περίπου. Φτάνει στον κολποκοιλιακό κόμβο ύστερα από 0.04 δευτερόλεπτα μετά από την παραγωγή της και στην

συνέχεια μεταφέρεται αργά μέσα από τον κόμβο, από όπου εξέρχεται ύστερα από 0.1 δευτερόλεπτα. Από το σημείο αυτό και πέρα, η διέγερση μεταφέρεται γρήγορα δια μέσου των σκελών του δεματίου του His και του δικτύου του Purkinje, προκαλώντας συστολή των κοιλιών περίπου 0.16 δευτερόλεπτα, μετά από την συστολή των κόλπων. Η ενεργοποίηση των κοιλιών προχωρεί με ειδική σειρά, παράγοντας συστολή των κοιλιών και διευκολύνοντας την περισσότερο αποδοτική εξώθηση του αίματος στα αρτηριακά στελέχη. Μια εσωτερική άποψη της καρδιάς που περιλαμβάνει όλες τις παραπάνω λεπτομέρειες απεικονίζεται στο Σχήμα 2.12



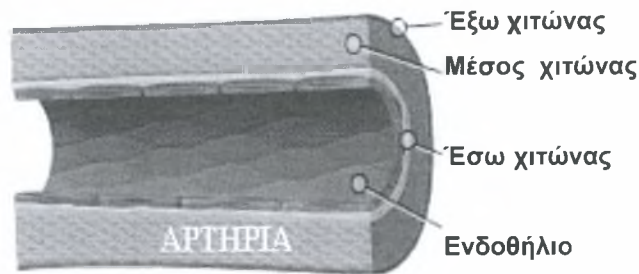
Εσωτερική άποψη της καρδιάς

**Σχήμα 2.12 Εσωτερική άποψη της καρδιάς**

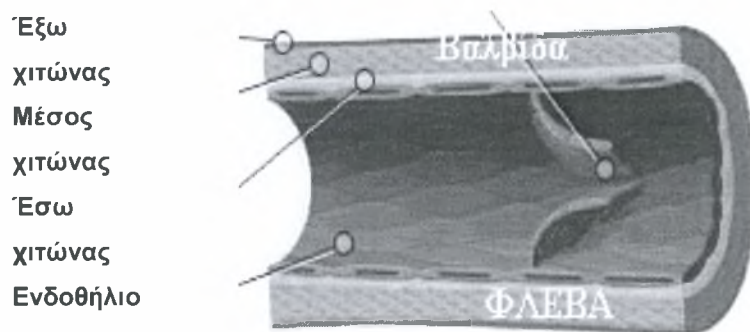
## 2.3 Ρευστοδυναμική του αίματος σε αρτηριακούς αγωγούς

### 2.3.1 Τα αιμοφόρα αγγεία

Για να φθάσει το αίμα σε κάθε τμήμα του οργανισμού μας, ρέει μέσα σε ειδικούς σωλήνες που ονομάζονται αιμοφόρα αγγεία. Τα αγγεία τα οποία ξεκινούν από την καρδιά και κατευθύνονται στην περιφέρεια ονομάζονται αρτηρίες, Σχήμα 2.13. Εκείνα τα οποία ακολουθούν αντίθετη κατεύθυνση, δηλ. από την περιφέρεια προς την καρδιά, ονομάζονται φλέβες, Σχήμα 2.14



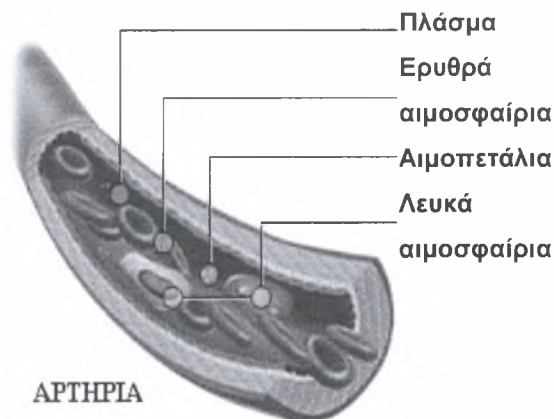
Σχήμα 2.13 Δομή τυπικής αρτηρίας



Σχήμα 2.14 Δομή τυπικής φλέβας

Γενικά στις αρτηρίες ρέει αίμα πλούσιο σε οξυγόνο και θρεπτικές ουσίες οι οποίες μεταφέρονται στους διαφόρους ιστούς του οργανισμού μας. Στις φλέβες συμβαίνει το αντίθετο, δηλ. επαναφέρουν το αίμα από την περιφέρεια στην καρδιά, πλούσιο σε άχρηστα προϊόντα και διοξείδιο του άνθρακα. Τα άχρηστα προϊόντα κατόπιν απομακρύνονται μέσω των νεφρών, οι οποίοι έχουν ως αποστολή τους τη διήθηση (καθαρισμό) του αίματος, το δε διοξείδιο του άνθρακα απομακρύνεται από τους πνεύμονες με την αναπνοή.

Το Σχήμα 2.15 δείχνει την τομή μιας αρτηρίας καθώς και τα κύρια συστατικά που ρέουν μέσα σε αυτή.




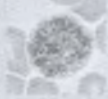





Σχήμα 2.15 Συστατικά ροή αίματος σε αρτηρία

### 2.3.2 Σύνθεση του αίματος \*

Το αίμα συνίσταται από το πλάσμα, άλατα, βιταμίνες και πρωτεΐνες που αιωρούνται σε αυτό καθώς και από τα ερυθρά αιμοσφαίρια ή ερυθροκύτταρα, τα λευκά αιμοσφαίρια ή λευκοκύτταρα και τα αιμοπετάλια ή θρομβοκύτταρα, Σχήμα 2.16. Το αίμα περιέχεται και κυκλοφορεί συνεχώς μέσα στο κυκλοφορικό σύστημα με τις εξής λειτουργίες:

- Μεταφορά του οξυγόνου από τους πνεύμονες στους ιστούς και στα όργανα
- Διοξειδίου του άνθρακος από τους ιστούς και τα όργανα πίσω στους πνεύμονες.
- Μεταφορά θρεπτικών ουσιών, ανόργανων ιόντων, βιταμινών κλπ. από το γαστρεντερικό σωλήνα και από τα άλλα όργανα (π.χ. ήπαρ, λιπώδης ιστός) προς τους ιστούς.
- Μεταφορά ορμονών από τους ενδοκρινείς αδένες στους ιστούς.
- Μεταφορά αχρήστων είτε και επιβλαβών ουσιών από τους ιστούς προς τα απεκκριτικά όργανα (κυρίως νεφρά).
- Μεταφορά και κατανομή της θερμότητας κατά τρόπον ώστε να διατηρείται σταθερή η θερμοκρασία του σώματος (θερμορρύθμιση).
- Συμβολή του αίματος στην άμυνα του οργανισμού.

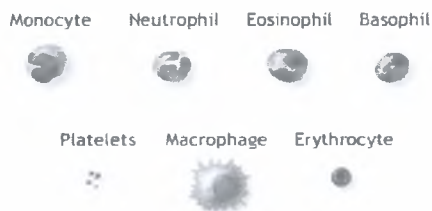


ΣΥΣΤΑΤΙΚΟ	ΚΥΡΙΑ ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ
ΝΕΡΟ	ΔΙΑΛΥΤΗΣ ΓΙΑ ΤΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΑΛΛΩΝ ΟΥΣΙΩΝ
ΑΛΑΤΑ ΝΑΤΡΙΟ, ΚΑΛΙΟ, ΑΣΒΕΣΤΙΟ, ΜΑΓΝΗΣΙΟ, ΧΛΩΡΙΟ, ΔΙΤΤΑΝΘΡΑΚΙΚΑ	ΩΣΜΩΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ, ΡΥΘΜΙΣΗ pH, ΡΥΘΜΙΣΗ ΔΙΑΠΕΡΑΤΟΤΗΤΑΣ ΜΕΜΒΡΑΝΩΝ
ΠΡΩΤΕΙΝΕΣ ΠΛΑΣΜΑΤΟΣ ΛΕΥΚΩΜΑΤΙΝΗ ΝΩΔΟΓΟΝΟ ΑΝΟΣΟΣΦΑΙΡΙΝΕΣ	ΩΣΜΩΤΙΚΗ ΙΣΟΡΡΟΠΙΑ, ΡΥΘΜΙΣΗ pH ΠΗΞΗ ΑΜΥΝΑ (ΑΝΤΙΣΩΜΑΤΑ)
ΤΥΠΟΣ ΚΥΤΤΑΡΩΝ	ΛΕΙΤΟΥΡΓΙΑ ΚΥΤΤΑΡΩΝ
ΕΡΥΘΡΟΚΥΤΤΑΡΑ (ΕΡΥΘΡΑ ΑΙΜΟΣΦΑΙΡΙΑ) 5 ΜΕ 6 ΕΚΑΤΟΜΜΥΡΙΑ ΑΝΑ ΚΥΒΙΚΟ ΧΙΛΙΟΣΤΟ ΑΙΜΑΤΟΣ	ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΟΞΥΓΟΝΟΥ ΚΑΙ ΒΟΗΘΕΙΑ ΣΤΗ ΜΕΤΑΦΟΡΑ ΔΙΟΞΕΙΔΙΟΥ ΤΟΥ ΑΝΘΡΑΚΑ
	
ΛΕΥΚΟΚΥΤΤΑΡΑ (ΛΕΥΚΑ ΑΙΜΟΣΦΑΙΡΙΑ) 5.000 ΩΣ 10.000 ΑΝΑ ΚΥΒΙΚΟ ΧΙΛΙΟΣΤΟ ΑΙΜΑΤΟΣ	ΠΑΡΑΓΩΓΗ ΑΝΤΙΣΩΜΑΤΩΝ ΓΙΑ ΑΜΥΝΑ ΚΑΤΑ ΤΩΝ ΜΟΛΥΝΣΕΩΝ
    	
ΒΑΣΕΟΦΙΛΑ ΟΥΔΕΤΕΡΟΦΙΛΑ ΗΩΣΙΝΟΦΙΛΑ ΜΟΝΟΚΥΤΤΑΡΑ ΛΕΜΦΟΚΥΤΤΑΡΑ	
ΑΙΜΟΠΕΤΑΛΙΑ 250.000 ΩΣ 400.000 ΑΝΑ ΚΥΒΙΚΟ ΧΙΛΙΟΣΤΟ ΑΙΜΑΤΟΣ	ΠΗΞΗ ΑΙΜΑΤΟΣ
	
ΟΥΣΙΕΣ ΠΟΥ ΜΕΤΑΦΕΡΟΝΤΑΙ ΑΠΟ ΤΟ ΑΙΜΑ	
ΘΡΕΠΤΙΚΑ ΣΥΣΤΑΤΙΚΑ (Π.Χ., ΓΛΥΚΟΖΗ, ΛΙΠΑΡΑ ΟΞΕΑ, ΒΙΤΑΜΙΝΕΣ), ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΟΥΣΙΕΣ ΠΡΟΪΟΝΤΑ ΤΟΥ ΜΕΤΑΒΟΛΙΣΜΟΥ, ΑΝΑΠΝΕΥΣΤΙΚΑ ΑΕΡΙΑ (ΟΞΥΓΟΝΟ ΚΑΙ ΔΙΟΞΕΙΔΙΟ ΤΟΥ ΑΝΘΡΑΚΑ), ΟΡΜΟΝΕΣ	

Σχήμα 2.16 Η σύσταση του αίματος

### Λευκά αιμοσφαίρια (Λευκοκύτταρα)

Τα λευκά αιμοσφαίρια είναι κύτταρα με πυρήνα χωρίς χρωστική και με διάφορα σχήματα. Τα λευκοκύτταρα που συναντώνται στο περιφερειακό αίμα διακρίνονται σε πολυμορφοπύρηννα λευκά αιμοσφαίρια των ουδετερόφιλων, ηωσινόφιλων και βασεόφιλων τύπων, λεμφοκύτταρα και μονοπύρηννα.(Σχήμα 2.17 ).



**Σχήμα 2.17 Τύποι Λευκοκυττάρων**

Τα ουδέτερα (N) είναι στρογγυλά κύτταρα με διάμετρο που ποικίλει από 10 έως 14  $\mu\text{m}$ . Ο πυρήνας τους φέρει δύο έως πέντε λοβούς που είναι συνδεδεμένοι με ένα λεπτό νήμα χρωματίνης. Τα ηωσινόφιλα έχουν περίπου το ίδιο μέγεθος, μόνο που ο πυρήνας φέρει συνήθως δύο λοβούς. Η διαφορά τους φαίνεται εντονότερα σε ξηρές επιστρώσεις αίματος όπου τα πρώτα παίρνουν πορφυρό χρώμα ενώ τα δεύτερα χρωματίζονται λιγότερο έντονα. Τα βασεόφιλα έχουν την ίδια μορφή με τα υπόλοιπα πολυμορφοπύρηνα κύτταρα αλλά χρωματίζονται ακόμα πιο αμυδρά και συναντώνται σπανιότερα από τα άλλα είδη.

Τα λεμφοκύτταρα (L) είναι συνήθως μικρά, περίπου 10  $\mu\text{m}$ , χωρίς όμως να αποκλείονται μεγαλύτερες μορφές μέχρι και 20  $\mu\text{m}$ . Τα μικρά λεμφοκύτταρα είναι στρογγυλά και περιέχουν ένα σχετικά μεγάλο, κυκλικό και έντονα χρωματισμένο πυρήνα. Η μεμβράνη του πυρήνα είναι πυκνή και το κυτόπλασμα, που είναι περιορισμένης ποσότητας, βάφεται ανοιχτό μπλε και μπορεί να περιέχει μερικούς μεγάλους κόκκους (granules). Συχνά διακρίνεται μια καθαρή ζώνη γύρω από τον πυρήνα. Στα μεγάλα λεμφοκύτταρα ο πυρήνας είναι σχετικά μικρός και συνήθως είναι κυκλικός, μπορεί όμως να είναι ελλειψοειδής ή να φέρει κοιλότητες. Το κυτόπλασμα είναι άφθονο και μπορεί να περιέχει μερικούς κόκκινους κόκκους. Το περίγραμμά του κυτοπλάσματος συχνά αλλοιώνεται από γειτονικά ερυθροκύτταρα.

Τα μονοπύρηνα (M) λευκά αιμοσφαίρια είναι τα μεγαλύτερα κύτταρα που συναντά κανείς στο περιφερειακό αίμα και η διάμετρός τους φτάνει τα 15 έως 22  $\mu\text{m}$ . Ο πυρήνας τους έχει ποικίλα σχήματα (κυκλικό, ελλειψοειδές, με λοβούς, σαν φασόλι) και συχνά εμφανίζεται αναδιπλωμένος. Η χρωματίνη είναι διατεταγμένη σε λεπτά νήματα με σαφώς καθορισμένα όρια. Το κυτόπλασμα είναι γαλαζωπό ή γκρι και περιέχει πολυάριθμους λεπτούς μοβ κόκκους.

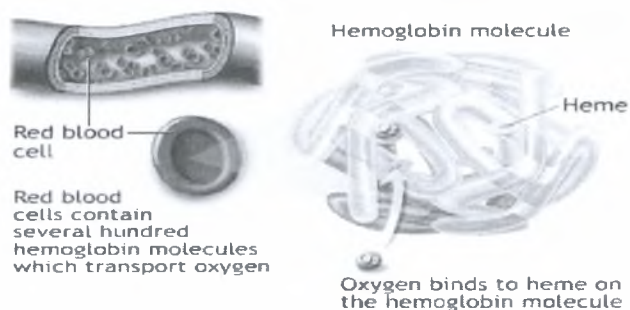
Τα λευκά αιμοσφαίρια παράγονται στον ερυθρό μυελό των οστών όπως και στη σπλήνα (τα λεμφοκύτταρα). Η διάρκεια της ζωής τους κυμαίνεται από λίγες μέρες μέχρι έξι μήνες. Ο αριθμός των λευκοκυττάρων κυμαίνεται από  $4000-11000/mm^3$  αίματος. Αυτές οι φυσιολογικές τιμές μπορούν να τριπλασιαστούν ή να τετραπλασιαστούν κατά τη διάρκεια βακτηριακών μολύνσεων. Η ελάττωση του αριθμού τους κάτω από 4000 λέγεται λευκοπενία, ενώ η αύξηση τους πάνω από 11.000 λέγεται λευκοκυττάρωση.

Τα λευκά αιμοσφαίρια αποτελούν τμήμα του αμυντικού συστήματος του σώματος εναντίον των λοιμώξεων. Τα πολυμορφοπύρρηνα και μονοπύρρηνα καταστρέφουν και απομακρύνουν με φαγοκυττάρωση και ενδοκυττάρια πέψη μικροοργανισμούς και τεμαχίδια ιστών που έχουν υποστεί βλάβη ή νέκρωση. Τα λεμφοκύτταρα, έχουν σχέση με την παραγωγή και κατανομή των αντισωμάτων.

### Αιμοπετάλια

Τα αιμοπετάλια ή θρομβοκύτταρα είναι απύρρηνα, άχρωα, μικρά κύτταρα με κόκκους στο κυτταρόπλασμα τους. (Σχήμα 2.18). Σχηματίζονται από ένα είδος μεγάλων κυττάρων του μυελού των οστών και ο αριθμός τους υπολογίζεται σε  $250.000/mm^3$  αίματος. Ελάττωση του αριθμού τους ονομάζεται θρομβοπενία ενώ η υπερβολική αύξηση θρομβοκυττάρωση.

Τα αιμοπετάλια έχουν διάρκεια ζωής 8-11 μέρες και έχουν μεγάλη σημασία διότι συντελούν στην πήξη του αίματος κατά τους τραυματισμούς και τις αιμορραγίες.

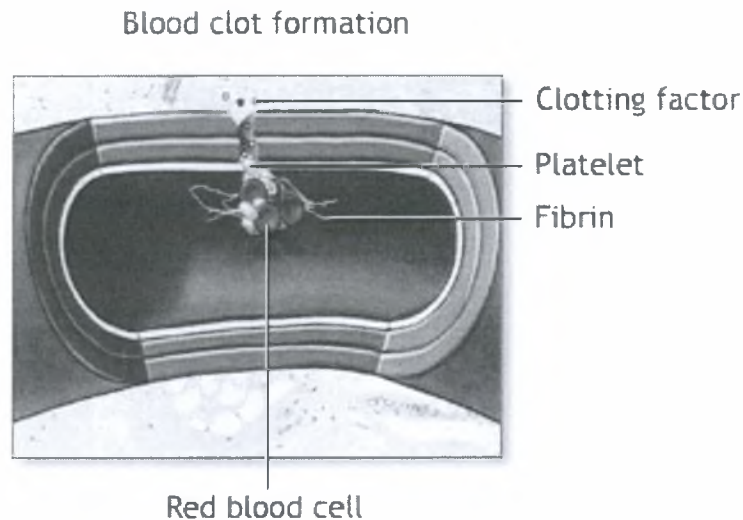


**Σχήμα 2.18 Αιμοπετάλια**

### Πήξη του αίματος και αιμόσταση

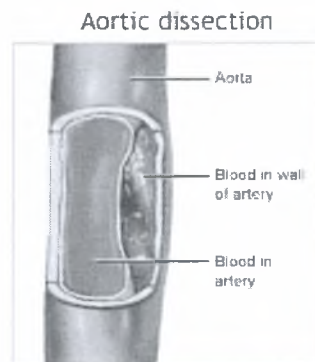
Το αίμα ερχόμενο σε επαφή, μέσα στο κυκλοφοριακό σύστημα, με το ενδοθήλιο των αγγείων και το ενδοκάρδιο διατηρείται σε υγρή κατάσταση. Σε περίπτωση όμως εξόδου του από

τα αγγεία ή επαφής του με το αρτηριακό τοίχωμα κάτω από ορισμένες συνθήκες τίθενται σε λειτουργία ενζυματικές διεργασίες που έχουν σαν αποτέλεσμα τη μετάπτωσή του από την υγρή στην ημιστερεή κατάσταση. Αυτή η διεργασία ονομάζεται πήξη του αίματος.(blood coagulation ή clotting). Μια σχηματική αναπαράσταση της δημιουργίας θρόμβου φαίνεται στο Σχήμα 2.19.



**Σχήμα 2.19 Δημιουργία θρόμβου**

Το πηχθέν αίμα έξω από τα αγγεία και έξω από το σώμα λέγεται *πλακούς* και μέσα στο κυκλοφοριακό σύστημα θρόμβος και ενώ η πρώτη κατάσταση είναι επιθυμητή, η δεύτερη δεν είναι.(Σχήμα 2.20)



**Σχήμα 2.20 Πήξη του αίματος**



Επίσχεση της αιμορραγίας εφόσον έχει γίνει ρήξη αγγείων εντός του σώματος γίνεται και με το μηχανισμό της αιμόστασης κατά τον οποίο επιτελείται αγγειοσυστολή.

Η πήξη του αίματος πραγματοποιείται με μετατροπή του ινωδογόνου του πλάσματος σε πυκνό δίκτυο ινώδους, εντός των δοκιδίων του οποίου εμπλέκονται και συγκρατούνται τα έμμορφα συστατικά του αίματος και η υγρή του φάση. Το ινωδογόνο είναι σφαιρίνη (πρωτεΐνη) του πλάσματος παραγόμενο από το ήπαρ(φυσιολογική συγκέντρωση στο πλάσμα 0.4-0.5 gr/100ml)

Μετά από πάροδο μιας ώρας, οι δοκίδες του ινώδους βραχύνονται με αποτέλεσμα τη συρρίκνωση του πήγματος και την έκθλιψη της υγρής φάσης. Η μετατροπή του ινωδογόνου σε ινώδες πραγματοποιείται με επίδραση επί του πρώτου του ενζύμου θρομβίνη, παρουσία ιόντων ασβεστίου ( $Ca^{++}$ ). Η θρομβίνη παράγεται κατά την πήξη του αίματος από πρόδρομο ανενεργό μορφή που ονομάζεται προθρομβίνη, η οποία παράγεται στο ήπαρ και βρίσκεται στο πλάσμα κατόπιν επίδρασης της θρομβοπλαστίνης και παρουσία ιόντων ασβεστίου ( $Ca^{++}$ ).

Ο μηχανισμός της αιμόστασης σε ρήξη μικρού αγγείου συνιστάται στη συστολή του (μείωση διαμέτρου). Συγχρόνως προσκολλώνται επί του ενδοθήλιου και επί των ινών κολλαγόνου αιμοπετάλια που αθροιζόμενα σχηματίζουν άμορφη μάζα και αποφράσσουν το χάσμα. Συγχρόνως απελευθερώνουν σερονίνη η οποία προκαλεί περαιτέρω συστολή.

#### Η ρεολογική πλευρά της αιμοπεταλικής θρόμβωσης

Η δημιουργία θρόμβου επιτελείται σε δύο στάδια. Το πρώτο που συμβαίνει στο λιμνάζον αίμα ονομάζεται πήξη (clot). Είναι κολλοειδές (gel) , κόκκινης όψης και περιλαμβάνει συστατικά αίματος. Είναι βασικό σε εξετάσεις καθίζησης .

Η άλλη μορφή δημιουργίας θρόμβου λαμβάνει χώρα στο ρέον αίμα και οφείλεται στη σύγκρουση σωματιδίων αίματος και τοιχωμάτων αγγείου. Αυτός ο τύπος επιτείνεται σε περιπτώσεις επαφής με πληγωμένο ιστό ή ξένο σώμα που παράγει μάζες που συνεχίζουν να ρέουν με το αίμα.

Αυτές οι μάζες λέγονται θρόμβοι (thrombi) και αποτελούνται κυρίως από αιμοπετάλια. Η συχνότητα σύγκρουσης μεταξύ των αιμοπεταλίων καθορίζει το μηχανισμό σχηματισμού θρόμβου. Η συχνότητα σύγκρουσης και το μέγεθος του θρόμβου εξαρτώνται από τις τοπικές συνθήκες ροής, μεταφορά μάζας με συναγωγή, διάχυση των αιμοπεταλίων και διάχυση των

υπολοίπων ουσιών που είναι υπεύθυνες για την συσσωμάτωση. Ειδικά θα πρέπει να μελετηθούν περιοχές του αρτηριακού και φλεβικού συστήματος όπου δημιουργούνται κατάλληλες συνθήκες για τον σχηματισμό θρόμβων. Τέτοιες θέσεις είναι καμπύλες διακλαδώσεις και απότομες μεταβολές της διαμέτρου (στενώσεις) που εξετάζονται στην παρούσα διπλωματική εργασία.

### Ερυθρά Αιμοσφαίρια (Ερυθροκύτταρα)

Τα ερυθρά αιμοσφαίρια είναι κύτταρα απύρηνα, αμφίκιου δίσκου, διαμέτρου 8μm, Σχήμα 21. Η ελάττωση του αριθμού τους κάτω από το κανονικό λέγεται αναιμία ή δε αύξηση ερυθροκυττάρωση. Στην ελαστικότητα της κυτταρικής μεμβράνης και το ιξώδες της αιμοσφαιρίνης οφείλεται η μεγάλη παραμορφωσιμότητα του ερυθρού αιμοσφαιρίου που έχει μεγάλη σημασία στη μικροκυκλοφορία (microcirculation) όπου διέρχεται από αγγεία μικρότερης διαμέτρου από τη βασική του διάσταση. Η βασική (μεγάλη) διάσταση των ερυθρών αιμοσφαιρίων είναι περίπου 8μm. Το ερυθρό αιμοσφαίριο μπορεί να διέλθει από τα τριχοειδή αγγεία με διάμετρο 5μm αλλά ακόμη και από το ενδοθηλιακό τοίχωμα της τάξεως των 0.5μm.

Εάν η ροή του αίματος στα μικρά αγγεία διακοπεί για κάποια μικρό χρονικό διάστημα τότε τα ερυθρά αιμοσφαίρια μπορεί να σχηματίσουν αλυσίδες επονομαζόμενες Rouleux (συσσωματώματα γραμμικά και διακλαδισμένα). Αυτό συμβαίνει και σε μικρούς ρυθμούς διάτμησης.

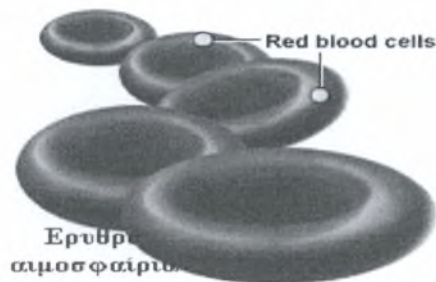
Το ένα ερυθρό αιμοσφαίριο αποτελείται από μια εύκαμπτη μεμβράνη, η οποία φέρει εσωτερικά διάλυμα ονομαζόμενο αιμοσφαιρίνη (Hemoglobin  $\equiv$  Hb). Αυτή είναι σύνθετο λεύκωμα (χρωμοπρωτεΐνη) συνιστάμενη από μόριο λευκώματος και σιδηρούχο χρωστική (αίμη).

Η περιεκτικότητα σε αιμοσφαιρίνη για τον άνδρα είναι 13.5-18.0 gr/100ml αίματος ενώ στην γυναίκα σε 11.5-16.4 gr/100ml. Σε περιπτώσεις ελαττωμένου ποσού, όπως συμβαίνει σε ελαττωμένο αριθμό ερυθρών αιμοσφαιρίων έχουμε αναιμία.

Τα ερυθρά αιμοσφαίρια έχουν διάρκεια ζωής 110-120 μέρες. Τα ερυθρά αιμοσφαίρια έχουν ειδικό βάρος μεγαλύτερο του πλάσματος. Για το λόγο αυτό εάν μποδισθεί η πήξη του αίματος μέσα σε σωληνάριο, αυτά καθιζάνουν βραδέως. (ταχύτητα καθίζησης 10-12mm/h).

Η κύρια λειτουργία των ερυθρών αιμοσφαιρίων είναι η μεταφορά οξυγόνου στους ιστούς και επομένως θα πρέπει να βρίσκονται σε κανονικό αριθμό στο αίμα. Η μεταφορά οξυγόνου γίνεται με τη δημιουργία ενώσεως της αιμοσφαιρίνης Hb με το οξυγόνο  $O_2$ , της

οξυαιμοσφαιρίνης ( $HbO_2$ ):  $Hb + O_2 \rightleftharpoons HbO_2$ . Πρόκειται περί αμφίδρομου αντίδρασης και όχι οξείδωσης. Παρουσία οξυγόνου η αντίδραση βαίνει προς τα δεξιά και απουσία οξυγόνου προς τα αριστερά. Η οξυαιμοσφαιρίνη εμφανίζει λαμπρό ερυθρό χρώμα στο αρτηριακό αίμα σε αντίθεση με το φλεβικό όπου απουσιάζει.



**Σχήμα 2.21 Μορφή ερυθρών αιμοσφαιρίων**

#### Η ευκαμψία του ερυθρού αιμοσφαιρίου και η επίδραση στην συνεκτικότητα

Το μεμονωμένο ερυθρό αιμοσφαίριο υφίσταται την επίδραση της συνεκτικής ροής και υπόκεινται σε διατμητικές δυνάμεις, οπότε παραμορφώνεται. Η παραμόρφωση εξαρτάται από τον ρυθμό διάτμησης, το περιεχόμενο του ερυθροκυττάρου και τις ελαστικές ιδιότητες της κυτταρικής μεμβράνης. Επειδή τα ερυθρά αιμοσφαίρια στερούνται πυρήνα συμπεριφέρονται ως σταγόνες ρευστού.

Ένα ρεαλιστικό μοντέλο προτάθηκε από τον Fung (1966) που περιγράφει το ερυθρό αιμοσφαίριο ως εύκαμπτη, μη εκτατή και κλειστή μεμβράνη μη πλήρως γεμάτη από συνεκτικό ασυμπίεστο ρευστό. Σε μεγάλους ρυθμούς διάτμησης η παραμόρφωση του μεμονωμένου κυττάρου είναι ο κύριος παράγων της μείωσης της σχετικής συνεκτικότητας. Όταν ο ρυθμός διάτμησης μειώνεται το φαινόμενο της παραμόρφωσης μειώνεται και η αλληλεπίδραση των κυττάρων μεταξύ τους και με το τοίχωμα γίνονται οι κυρίαρχοι παράγοντες.

Τα ασθενή κύτταρα υφίστανται παραμορφώσεις στερεού σώματος. Μεταβολή στις ιδιότητες του περιεχομένου του ερυθρού αιμοσφαιρίου, προκαλεί αυξημένη στερεότητα (ανελαστικότητα) του κυττάρου και επομένως αύξηση της συνεκτικότητας του αίματος. Σε

περιπτώσεις απώλειας τμήματος του ηλεκτρικού φορτίου, που συμβαίνει συχνά σε κύτταρα, η δύναμη μειώνεται και αυτό προκαλεί μεγαλύτερη αλληλεπίδραση μεταξύ των κυττάρων και βοηθάει τη δημιουργία συσσωματωμάτων και επομένως μεταβολή των ρεολογικών ιδιοτήτων του αίματος.

#### Αξονική μετανάστευση των κυττάρων κατά την αιμοροή

Κατά την εισαγωγή σωματιδίων σε ροή παρατηρούμε ότι, λόγω των τάσεων που επιβάλλονται στην επιφάνεια τους, παραμορφώνονται ανάλογα με τις ελαστικές τους ιδιότητες, κάμπτονται, λυγίζουν και στρέφονται. Επίσης υπάρχει αλληλεπίδραση σωματιδίων και τοιχώματος, με αποτέλεσμα τη μετακίνηση του σωματιδίου μακριά από το τοίχωμα, λόγω της δύναμης που ασκείται στην κάθετη κατεύθυνση και έτσι δημιουργείται ένα αραιότερο στρώμα σωματιδίων κοντά στο τοίχωμα (free marginal layer, plasma skimming layer). Η μετανάστευση αυτών των σωματιδίων προκαλεί μεταβολή της φαινομενικής συνεκτικότητας του ρευστού.

Πρέπει να σημειωθεί ότι το ανθρώπινο σώμα κάνει χρήση του γεγονότος ότι στον άξονα του αγγείου η συγκέντρωση του αίματος σε ερυθρά αιμοσφαίρια και επομένως σε αιμοσφαιρίνη είναι υψηλή. Στις αρτηρίες που απάγονται από τον βασικό κλάδο της μητριαίας αρτηρίας καθώς και στις νεφρικές αρτηρίες υπάρχει (ακριβώς στην απαγωγή) το λεγόμενο αρτηριακό μαξιλάρι (arterial cushion), έτσι ώστε το απαγμένο αίμα να προέρχεται κυρίως από την κεντρική περιοχή και όχι από την περιοχή του τοιχώματος. Επομένως να είναι πλούσιο σε αιμοσφαίρια.

#### Το πλάσμα του αίματος

Το πλάσμα αποτελεί την υγρή φάση του αίματος. Ο όγκος του είναι 3 λίτρα σ' όλο το σώμα(σχεδόν το 55% του ολικού όγκου του αίματος). Το πλάσμα αποτελεί μέρος του εξωκυττάριου υγρού και του υγρού που για ένα άτομο 65 κιλών ανέρχεται σε 15 λίτρα περίπου. Τα υπόλοιπα 12 λίτρα αποτελούν το υγρό των ιστών. Μεταξύ του πλάσματος και του υγρού των ιστών επιτελείται, μέσω του τοιχώματος των τριχοειδών, ανταλλαγή ύδατος, ανόργανων ιόντων και μικρομοριακών ουσιών με ταχύ ρυθμό, ώστε η σύσταση και των δύο να είναι όμοια.

Το πλάσμα αποτελείται κατά το 90% περίπου από νερό εντός του οποίου ευρίσκονται διαλυμένα ανόργανα ιόντα, λευκώματα, λιπαρά οξέα, βιταμίνες, χρωστικές ουσίες και ουσίες υπολοίπων αλάτων. Μέσα στο πλάσμα αιωρούνται τα έμμορφα συστατικά του αίματος. Το ειδικό βάρος του πλάσματος είναι περίπου  $1,03 \text{ gr/cm}^3$ .

### Συνεκτικότητα του πλάσματος και ορός

Η συνεκτικότητα του πλάσματος εξαρτάται από την συγκέντρωση της πρωτεΐνης και γενικά αυξάνεται με την συγκέντρωση της πρωτεΐνης. Η σχέση της συγκέντρωσης της πρωτεΐνης με το ιξώδες δίνεται από την παρακάτω εμπειρική σχέση (Hess-Bingham):

$$\mu_p = \mu_w \cdot \frac{1}{1 - b \cdot c} \quad (2.1)$$

όπου  $\mu_p$  και  $\mu_w$  είναι αντίστοιχα τα ιξώδη πλάσματος και νερού,  $c$  είναι η συγκέντρωση του πλάσματος ή ορού σε πρωτεΐνες και  $b$  είναι μια σταθερά.

Η σχέση μεταξύ ιξώδους αίματος και ιξώδους πλάσματος δίνεται από τον Bayliss ως τροποποιημένη εξίσωση Hatschek από τους Whittaker και Winton:

$$\mu_b = \mu_p \cdot \frac{k}{\left(1 - \phi^{\frac{1}{3}}\right)} \quad (2.2)$$

όπου το  $k$  είναι συνάρτηση της ακτίνας του αγγείου και  $\phi$  η συγκέντρωση του πλάσματος σε έμμορφα συστατικά.

Η πρωτεΐνη με τη μεγαλύτερη συγκέντρωση στο πλάσμα είναι η λευκοματίνη (albumin), αλλά λόγω του μικρού της μεγέθους η επίδραση στις μηχανικές ιδιότητες του πλάσματος είναι μικρή. Σε ορισμένες περιπτώσεις, η υψηλή της συγκέντρωση προκαλεί μείωση του ιξώδους αφού συνοδεύεται από μείωση της συγκέντρωσης μιας άλλης πρωτεΐνης, της σφαιρίνης (globulin), της οποίας η μέση συγκέντρωση προκαλεί αύξηση του ιξώδους σε ασθένειες ήπατος.

Η πρωτεΐνη που έχει το μεγαλύτερο μέγεθος, έχει τη μικρότερη συγκέντρωση (5%) στο πλάσμα και είναι το ινωδογόνο (fibrinogen). Η τάση του να δημιουργεί συσσωματώματα την κάνει σημαντική για τον καθορισμό των ρεολογικών ιδιοτήτων του πλάσματος. Η δημιουργία συσσωματωμάτων εξαρτώμενη από τη συγκέντρωση του ινωδογόνου είναι καθοριστικός παράγοντας για την μη νευτώνεια συμπεριφορά του αίματος και υπαίτιος για την εμφάνιση της αρχικής τάσης  $\tau_0$  και την ρεολογική συμπεριφορά σε μικρούς ρυθμούς διάτμησης.



Ο Merrill (1965) πρότεινε την κάτωθι έκφραση για την τάση ροής  $\tau_0$  ως συνάρτηση συγκέντρωσης του ινωδογόνου:

$$\tau_0^{\frac{1}{2}} = 0.36 \cdot \left( \frac{B}{1-c} - 1 \right) \quad (2.3)$$

όπου B είναι εμπειρική συνάρτηση της συγκέντρωσης του ινωδογόνου στο πλάσμα

Εάν ένα από το πλάσμα αφαιρεθούν οι πρωτεΐνες το προκύπτει διάλυμα λέγεται *ορρός* (*serrum*). Ο ορρός έχει καθαρά νευτώνεια συμπεριφορά χωρίς αρχική τάση. Η συνεκτικότητα του ορρού είναι μικρότερη κατά 20% από εκείνη του πλάσματος.

#### Δομή και διαστάσεις του αρτηριακού συστήματος

Το αρτηριακό σύστημα αποτελείται από αγγεία διαφόρων διαμέτρων και μηκών που διαδοχικά διαχωρίζονται σε μικρότερα αγγεία. Βασικό, πρώτο και μεγαλύτερο αγγείο μετά την καρδιά είναι η αορτή η οποία διακλαδίζεται διαδοχικά σε μικρότερα αγγεία μέχρι τα λεπτότερα, που ονομάζονται τριχοειδή. Στη συνέχεια τα τριχοειδή αγγεία ενώνονται μεταξύ τους σε όλο και μεγαλύτερα αγγεία που αποτελούν το φλεβικό σύστημα, του οποίου τα αγγεία ακολουθούν διόδους παράλληλες με εκείνες των αρτηριών.

Η αορτή είναι η μεγαλύτερη σε διάμετρο αρτηρία (2,5-3cm) κατά την έξοδο από την καρδιά. Η αορτή είναι μεγάλη σε μήκος εκτεινόμενη από την αορτική βαλβίδα και κατερχόμενη μέχρι τη μηριαία διακλάδωση (διάμετρος 1,75cm περίπου). Το τμήμα αυτό της αορτής υποδιαιρείται στα κάτωθι τρία τμήματα:

**α. Την ανιούσα αορτή** με μήκος περίπου 5 cm που βρίσκεται ανατομικά μεταξύ της πνευμονικής αρτηρίας και της κοίλης φλέβας. Στην αρχή της ανιούσας αορτής υπάρχουν μόνο δύο διακλαδώσεις, η δεξιά και αριστερή στεφανιαία αρτηρία που εφοδιάζουν τον καρδιακό μυ με αίμα.

**β. Το αορτικό τόξο** εκεί όπου η αορτή στρέφεται προς τα αριστερά και ακολούθως προς τα κάτω μέχρι περίπου 2.5cm από το πάνω όριο του στέρνου. Τρεις κλάδοι εξέρχονται από το πάνω μέρος του τόξο: η βραχιοκεφαλική ή ανώνυμος, η κοινή καρωτίδα και η υποκλείδια αρτηρία

**γ. Την κατιούσα αορτή** αποτελούμενη από την κατιούσα θωρακική αορτή μέσου μήκους 20 cm, η οποία έχει δύο διακλαδώσεις: τις μεσοπλευρίες αρτηρίες που εφοδιάζουν με αίμα το

τοίχωμα του θώρακος και τις σπλαχνικές αρτηρίες που εφοδιάζουν με αίμα τα όργανα στη σωματική κοιλότητα

Ακολουθως συνεχίζεται στην κατιούσα κοιλιακή αορτή. Αυτό το τμήμα υποδιαιρείται επίσης σε μεσοπλεύριες και σπλαχνικές αρτηρίες, κοιλιακή, νεφρική, ηπατική, σπληνική, μεσεντέριο και καταλήγει μπροστά από τον τέταρτο οσφυϊκό σπόνδυλο, διακλαδούμενο στις δύο κοινές λαγόνιες αρτηρίες που είναι οι δύο βασικές αρτηρίες που εφοδιάζουν τα κάτω άκρα με αίμα.

#### Δομή και σύνθεση των αρτηριακών τοιχωμάτων των αγωγών

Σύμφωνα με τη δομή τους, οι μεγάλες αρτηρίες που εκβάλλουν από την καρδιά και οι πρώτοι κλάδοι τους είναι “ελαστικές αρτηρίες” διότι περιέχουν μεγάλο ποσοστό ελαστίνης. Απομακρυνόμενοι από την καρδιά, το ποσοστό των μυϊκών κυττάρων αυξάνει και η αρτηριακή δομή πλησιάζει εκείνη των μυϊκών αρτηριών. Το τοίχωμα του αγγείου αποτελείται από πέντε συντελεστές:

- a. **Τον ενδοθηλιακό ιστό**, ο οποίος είναι το εσωτερικό στρώμα του αγγείου που έρχεται σε επαφή με το ρέον αίμα και αποτελείται από στρώμα απλών κυττάρων που είναι διατεταγμένα κατά την κατεύθυνση της ροής του αίματος. Έχει δύο αποστολές:
  - τη **συμβατικότητα** με το αίμα ώστε να εμποδίζει την προσκόλληση διαφόρων ουσιών στο τοίχωμα του αγγείου και
  - την **επιλεκτική διαπερατότητα** ώστε διάφορες ουσίες να μπορούν να διέρχονται δια του τοιχώματος στον ιστό.

**β. Τις ίνες κολλαγόνου**, η οποία είναι λευκωματώδης ουσία που εμφανίζεται στα αιμοφόρα αγγεία υπό μορφή νημάτων οφιοειδούς μορφής, λόγω της οποίας επηρεάζουν τις μηχανικές ιδιότητες των αγγείων μετά από κάποια διάταση. Η ποσότητα του κολλαγόνου στα αιμοφόρα αγγεία αυξάνεται με την ηλικία και έχει ως αποτέλεσμα την αύξηση του μέτρου ελαστικότητας με την ηλικία.

γ. **Τις ίνες ελαστίνης**, που είναι επίσης λευκωματώδης ουσία, αλλά τελείως διαφορετική από το κολλαγόνο. Έχει μικρή αντίσταση στην έκταση αλλά πολλή μεγάλη δυνατότητα επέκτασης και μηχανικά συμπεριφέρεται όπως το καουτσούκ. Η μεγάλη περιεκτικότητά της σε αγγεία με μεγάλη πάλμωση τεκμηριώνει την αντοχή της στην περιφερειακή αντοχή των αγγείων.

δ. **Τους λείους μύες**, οι οποίοι εμφανίζονται στα αιμοφόρα αγγεία υπό διαμήκη μορφή και την οφιοειδή περιφερειακή μορφή γύρω από το αγγείο. Με τη σύσπαση αυτής της ελικοειδούς μορφής λείων μυών προκαλείται αγγειοσυστολή (μείωση διατομής) αλλά λόγω του ότι είναι προεντεταμένοι μπορούν να χαλαρώνουν και να προκαλούν αγγειοδιαστολή (αύξηση της διατομής). Ο έλεγχος αυτής της λειτουργίας γίνεται με νευρικούς παλμούς μέσω χημικής διέγερσης. Λειτουργία αυτού του μυός είναι η αιμόσταση λόγω αρτηριακής κατάρρευσης σε περίπτωση τοπικού τραυματισμού, οπότε με το σπασμό μειώνεται η διατομή.

ε. **Τη βασική ουσία**, η οποία αποτελείται από μη λευκωματώδεις ουσίες, κυρίως βλέννο-σακχαρίνες που πληρώνουν τα κενά μεταξύ των άλλων στοιχείων και χρησιμεύουν ως συνδετικός ιστός. Παίζει επίσης το ρόλο λιπαντικού και χρησιμεύει ως φίλτρο και μέσο εναλλαγής ιόντων. Είναι διατεταγμένες σε τρία στρώματα:

- *Τον εσωτερικό χιτώνα*, ο οποίος αποτελείται από ένα στρώμα ενδοθηλίου
- *Τον μέσο χιτώνα* που αποτελεί το μεγαλύτερο μέρος του τοιχώματος του αγγείου και αποτελείται από σφιχτές ελικοειδείς ίνες με λεία μυϊκά κύτταρα μεταξύ τους.
- *Τον έξω χιτώνα*, που αποτελείται από ελαστίνη και ίνες κολλαγόνου και περιβάλλεται από ιστούς.

#### Ολίσθηση στο τοίχωμα ενός αρτηριακού αγγείου

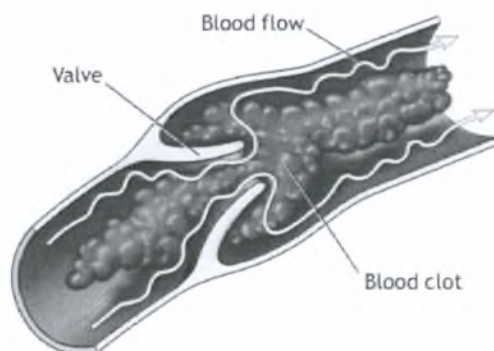
Κατά το φαινόμενο της ολίσθησης ένα σωματίδιο κινούμενο κοντά σε τοίχωμα θα υποστεί τη δράση της κρουστικής δύναμης, η οποία προκαλεί επιβράδυνση του σωματιδίου ως προς το συνεχώς ρέον (πλάσμα), επιφέροντας έτσι μια τελείως διαφορετική συνθήκη ροής στα τοιχώματα.



### 2.3.3 Νόσοι και παθήσεις των αρτηριών

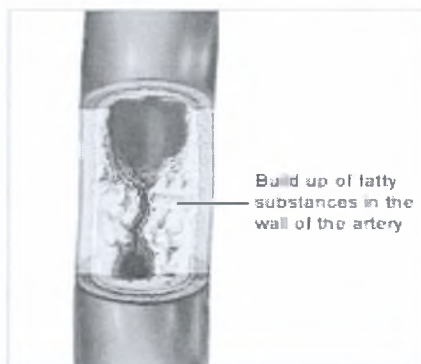
#### Στένωση των αιμοφόρων αγγείων

Η στένωση των αιμοφόρων είναι μια σχετικά συνήθης κατάσταση στο κυκλοφορικό σύστημα και δημιουργείται με διάφορους μηχανισμούς, όπως με απόθεση ινώδους ή ενδοαρτηριακές πλάκες. Υπάρχει καθολική συμφωνία μεταξύ των ερευνητών ότι μετά την απόθεση του ινώδους ή άλλου υλικού, το εσωτερικό τοίχωμα της αρτηρίας καλύπτεται από ενδοθηλιακό στρώμα και ενσωματώνεται στο αρτηριακό τοίχωμα. Επομένως η στενομένη περιοχή μπορεί να θεωρηθεί ως ένα τμήμα της αρτηρίας με διαφορετική ακτίνα και πάχος τοιχώματος και άλλες ελαστικές ιδιότητες, Σχήμα 2.22.



**Σχήμα 2.22 Στένωση αρτηρίας**

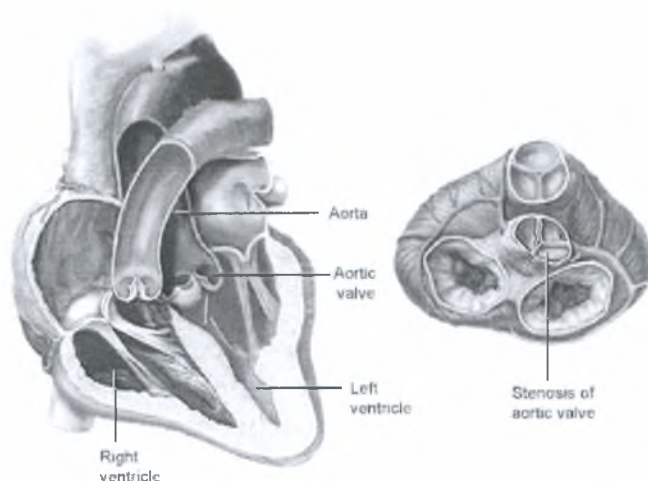
Το φαινόμενο αυτό αποτελεί μια διαδεδομένη νόσο των ηλικιωμένων κυρίως και οδηγεί σε καρδιακό έμφραγμα, εγκεφαλική θρόμβωση και άλλες σοβαρές ασθένειες. Εν μέρει αυτές οι επιπλοκές οφείλονται στην αυξημένη συστολική πίεση που παρατηρείται όταν υπάρχει στένωση και προκαλεί περαιτέρω εξέλιξη της αρτηριοσκλήρωσης. (Σχήμα 2.23 )



**Σχήμα 2.23 Αρτηριοσκλήρωση**

### Στένωση αορτικής βαλβίδας

Η αορτική βαλβίδα βρίσκεται μεταξύ αριστεράς κοιλιάς και αορτής, και αποτελείται από τρεις πτυχές. Στην συστολή της καρδιάς ανοίγει και στην διαστολή κλείνει. Φυσιολογικά το άνοιγμα της βαλβίδας είναι 3-4 τετραγωνικά εκατοστά. Εάν από κάποια αιτία το στόμιο της βαλβίδας γίνει μικρότερο η κατάσταση αυτή ονομάζεται στένωση της αορτικής βαλβίδας, Σχήμα 2.24.



**Σχήμα 2.24 Αορτική στένωση**

Η στένωση προκαλεί αύξηση της πίεσης της αριστεράς κοιλιάς για να μπορεί να εξωθεί το αίμα στην αορτή. Αυτή προκαλεί αντιρροπιστική συγκεντρική υπερτροφία της αριστεράς κοιλιάς.

### Αίτια της στένωσης της αορτικής Βαλβίδας

- Ασβέστωση της συγγενούς δίπτυχης αορτικής βαλβίδας. Η αορτική βαλβίδα αποτελείται από δυο πτυχές και όχι τρεις όπως είναι το φυσιολογικό). Στην περίπτωση αυτή η στένωση παρουσιάζεται σε ηλικία 30-60 ετών περίπου.
- Να αποτελείται η βαλβίδα από μια πτυχή (μονόπτυχη αορτική βαλβίδα). Η περίπτωση αυτή είναι σπάνια και η στένωση εμφανίζεται σε μικρή ηλικία.
- Ο ρευματικός πυρετός προκαλεί στένωση αορτικής βαλβίδας
- Δύσπνοια: Οφείλεται σε αριστερή καρδιακή ανεπάρκεια. Στην αρχή παρουσιάζεται κατά την κόπωση, και μετά εν ηρεμία. Όταν η δύσπνοια είναι σοβαρή μπορεί να εκδηλωθεί σαν οξύ πνευμονικό οίδημα

#### Συμπτώματα της στένωσης της αορτικής βαλβίδας

- Αθηροσκληρυντική: Σε μεγάλη ηλικία συγκεντρώνεται ασβέστιο και προκαλείται στένωση της τρίπτυχης αορτικής βαλβίδας.
- Στηθάγχη, δηλαδή πόνος στο στήρνο ή στην πλάτη
- Συγκοπτικά επεισόδια ή ζάλη στην προσπάθεια και εύκολη κόπωση.

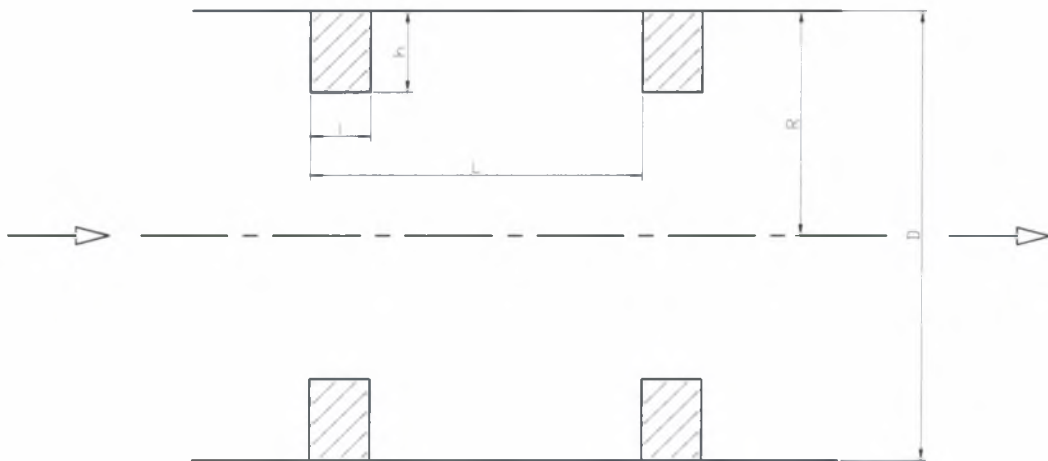
#### Διάγνωση της στένωσης της αορτικής βαλβίδας

- Από το ιστορικό και τα συμπτώματα του ασθενούς.
- Από την κλινική εξέταση: Στην ακρόαση ακούγεται ένα ειδικό φύσημα στην διάρκεια της συστολής, και οφείλεται στο θόρυβο που παράγει το αίμα καθώς περνά από την στεγνωμένη αορτική βαλβίδα.
- Από ηλεκτροκαρδιογράφημα: Καταγράφεται η υπερτροφία των τοιχωμάτων της αριστεράς κοιλιάς και του αριστερού κόλπου.
- Από υπερηχοκαρδιογράφημα: Επιβεβαιώνεται η διάγνωση και εκτιμάται η σοβαρότητα της αορτικής στένωσης. Διαπιστώνεται υπερτροφία και διάταση της αριστεράς κοιλιάς, ανατομικές ανωμαλίες της βαλβίδας, όπως ασβέστωση.
- Με μέτρηση της ταχύτητας της ροής του αίματος διάμεσου της βαλβίδας οπότε εξάγεται η διαφορά πίεσης, που είναι το σημαντικότερο σημείο για την εκτίμηση της σοβαρότητας της βλάβης.
- Με καθετηριασμό:Τις περισσότερες φορές χρειάζεται, ιδίως σε καταστάσεις που υπάρχει υποψία στεφανιαίας νόσου.

### 3 ΦΥΣΙΚΗ ΤΟΥ ΥΠΟ ΜΕΛΕΤΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ

#### 3.1 Γεωμετρία του προβλήματος

Το κεφάλαιο αυτό της διπλωματικής εργασίας αναφέρεται στην προσομοίωση μοντέλου υπολογιστικής ρευστοδυναμικής της ροής του αίματος και των συστατικών του (ερυθρά αιμοσφαίρια, αιμοπετάλια και λευκοκύτταρα) καθώς αυτό διέρχεται μέσα από ορθογωνικές περιοδικές αρτηριακές στενώσεις. Οι αρτηρίες προσομοιώνονται σαν κυλινδρικοί αγωγοί και οι στενώσεις ως ορθογωνικά εμπόδια. Ένα σχήμα της γεωμετρίας του προβλήματος που εξετάζεται φαίνεται στο Σχήμα 3.1



Σχήμα 3.1 Γεωμετρία της ροής

#### 3.2 Εξισώσεις ροής συνεχούς φάσης

Οι εξισώσεις που διέπουν τη ροή της συνεχούς φάσης είναι η εξίσωση της συνέχειας και οι εξισώσεις Navier-Stokes, οι οποίες σε κυλινδρικές συντεταγμένες και σε τρεις διαστάσεις έχουν την ακόλουθη μορφή:

Εξίσωση της συνέχειας:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot r \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot u_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} = 0 \quad (3.1)$$

Εξισώσεις ορμής:

r-διεύθυνση

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \cdot \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = F_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad (3.2)$$

θ-διεύθυνση

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r \cdot u_\theta}{r} + u_z \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = F_\theta - \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right) \quad (3.3)$$

z-διεύθυνση

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (3.4)$$

όπου  $u_r$  είναι η ταχύτητα στην r- διεύθυνση (ακτινική διεύθυνση),  $u_\theta$  η ταχύτητα στην θ- διεύθυνση, και  $u_z$  η ταχύτητα στην z-διεύθυνση. Επίσης το  $\rho$ ,  $\mu$  εκφράζουν την πυκνότητα και το ιξώδες του ρευστού, αντίστοιχα.

Στην περίπτωση ροής με αξονική συμμετρία ( $u_\theta = 0$  και  $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ ) οι παραπάνω

εξισώσεις παίρνουν την μορφή:

Εξίσωση της συνέχειας :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial(\rho \cdot r \cdot u_r)}{\partial r} + \frac{\partial(\rho \cdot u_z)}{\partial z} = 0 \quad (3.5)$$

Εξισώσεις ορμής:

r-διεύθυνση:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \cdot \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = F_r - \frac{\partial P}{\partial r} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right) \quad (3.6)$$

z-διεύθυνση:

$$\rho \cdot \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = F_z - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \cdot \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) \quad (3.7)$$

- Στα τοιχώματα του αγωγού η ταχύτητα είναι ίση με το μηδέν ( $u = 0$ )
- Έχουμε περιοδικές συνθήκες δηλαδή  $u_r(0) = u_r(L)$  και  $u_z(0) = u_z(L)$
- Στον άξονα συμμετρίας ισχύει:  $u_r = 0$  και  $\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$

Στην παρούσα εργασία έχουν γίνει οι εξής παραδοχές για τη συνεχή φάση: α) Το αίμα λαμβάνεται σαν νευτώνειο ρευστό, β) Οι αρτηρίες θεωρούνται κυκλικοί σωλήνες, και γ) Τα τοιχώματα των αρτηριών λαμβάνονται ελαστικά μη πορώδη (στερεά)

### 3.2.1 Στρωτή ροή σε απότομες συστολές αγωγών

Όταν η διατομή του αγωγού μειώνεται απότομα, η ροή λόγω αδράνειας δεν μπορεί να ακολουθήσει τις έντονες μεταβολές της μορφής των τοιχωμάτων του με αποτέλεσμα να αποκολλάται από τα τοιχώματα του μικρού αγωγού και να εκτοξεύεται με την μορφή φλέβας μεταβλητής διατομής μέσα στον μεγάλο αγωγό. Εν συνεχεία μετά την αποκόλληση, η δέσμη του ρευστού συστέλλεται αρχικά μέχρι μια ελάχιστη διατομή (γνωστή ως *vena contracta*) και τέλος διαστέλλεται έως ότου η διατομή της γίνει ίση με την διατομή του μεγάλου αγωγού.

### 3.2.2 Αδιάστατες παράμετροι του προβλήματος

Η βασική παράμετρος η οποία χαρακτηρίζει το είδος της ροής σ' έναν αγωγό κυκλικής διατομής είναι ο αριθμός Reynolds:

$$Re = \frac{\rho \cdot u \cdot d}{\mu} = \frac{u \cdot d}{\nu} \quad (3.8)$$

όπου  $d$  είναι η εσωτερική διάμετρος του αγωγού,  $u$  η μέση ταχύτητα,  $\rho$  η πυκνότητα, και  $\mu$  και  $\nu$  το δυναμικό και κινηματικό ιξώδες αντίστοιχα.

Ο αριθμός Reynolds είναι μια αδιάστατη ομάδα γεωμετρικών και φυσικών χαρακτηριστικών που παριστάνουν την επίδραση του ιξώδους στην διαμόρφωση της ροής και η φυσική του σημασία είναι ότι εκφράζει το λόγο των αδρανειακών δυνάμεων προς τις δυνάμεις ιξώδους ή εναλλακτικά το λόγο της κινητικής ενέργειας προς την απώλεια της μηχανικής



ενέργειας. Η μετατροπή της ιξώδους ροής από στρωτή σε τυρβώδη γίνεται όταν ο αριθμός Reynolds αποκτήσει μια κρίσιμη τιμή,  $Re_c$ , η οποία είναι γνωστή ως κρίσιμος αριθμός Reynolds. Στους συνήθεις αγωγούς, η ροή μετατρέπεται από στρωτή σε τυρβώδη για τιμές Reynolds μεγαλύτερες από 2000 και μικρότερες από 4000. Επομένως η τιμή 2000 αποτελεί ένα ανώτερο όριο για την ευστάθεια της στρωτής ροής.

3.3 Δυναμική σωματιδίων

Η κίνηση του σωματιδίου δίνεται από τον νόμο του Νεύτωνα σ’ ένα σχήμα κατά Lagrange, σύμφωνα με τη σχέση:

$$m_p \cdot \frac{dv}{dt} = \Sigma F \tag{3.9}$$

όπου  $m_p$  είναι η μάζα του σωματιδίου,  $v_p$  η ταχύτητα του σωματιδίου και  $\Sigma F$  είναι η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκείται σ’ αυτό.

Κάθε σωματίδιο το οποίο κινείται μέσα σε ένα ρευστό δέχεται ένα πλήθος δυνάμεων εξαιρετικά ποικίλης έντασης. Κάθε μια από αυτές τις δυνάμεις έχει διαφορετική επίδραση στην κίνηση του σωματιδίου επιταχύνοντας ή επιβραδύνοντας το.

Οι δυνάμεις που μπορεί να ασκούνται στο σωματίδιο είναι δυνάμεις βαρύτητας, άνωσης, οπισθέλκουσας, επιτάχυνσης όπως η εικονική ή προστιθέμενη μάζα, η δύναμη Basset, η κλίση πίεσης, δυνάμεις ανύψωσης όπως οι δυνάμεις Saffman και Magnus και φυγόκεντρες δυνάμεις (Πίνακας 3.1.)

Πίνακας 3.1 Δυνάμεις που ασκούνται σε σωματίδιο

Ομάδα	Δύναμη
Δυνάμεις βαρύτητας	Βαρύτητα Ανωση
Δύναμη οπισθέλκουσας	Δύναμη οπισθέλκουσας
Δυνάμεις επιτάχυνσης	Προστιθέμενη μάζα Δύναμη Basset Κλίση πίεσης
Δυνάμεις ανύψωσης	Δύναμη του Saffman Δύναμη Magnus

### 3.3.1 Δύναμη οπισθέλκουσας

Η δύναμη που ασκεί το ρευστό στο σωματίδιο ονομάζεται οπισθέλκουσα δύναμη και δίνεται από την σχέση:

$$F_D = \frac{1}{2} \cdot \rho_f \cdot c_D \cdot A \cdot |\mathbf{u} - \mathbf{v}| \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (3.10)$$

όπου,  $\rho_f$  είναι η πυκνότητα της συνεχούς φάσης,  $c_D$  ο συντελεστής οπισθέλκουσας,  $A$  το εμβαδόν προβολής του σωματιδίου σε επίπεδο κάθετο στην διεύθυνση της κίνησης του και  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  οι ταχύτητες της συνεχούς φάσης και του σωματιδίου αντίστοιχα.

Γενικά, ο συντελεστής οπισθέλκουσας εξαρτάται από τη γεωμετρική μορφή του σωματιδίου, τον προσανατολισμό του ως προς την κατεύθυνση της ροής, καθώς επίσης και από τις παραμέτρους της ροής (π.χ. από τον αδιάστατο αριθμό Reynolds).

Για μικρές τιμές του  $Re_p$ , η ροή γύρω από το σφαιρικό σωματίδιο είναι αργή και η δύναμη  $F_D$  δίνεται από την σχέση του Stokes:

$$F_D = 3 \cdot \pi \cdot \mu \cdot D \cdot f \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (3.11)$$

όπου  $\mu$  είναι το ιξώδες του ρευστού,  $D$  η διάμετρος του σωματιδίου,  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  είναι οι ταχύτητες της συνεχούς φάσης και του σωματιδίου αντίστοιχα και  $f$  είναι ο συντελεστής οπισθέλκουσας του Stokes, ο οποίος είναι ίσος με:

$$f = \frac{C_D Re}{24}, \quad f \rightarrow 1 \quad (3.12)$$

Με την αύξηση του αριθμού  $Re (\approx 100)$ , η ροή αρχίζει να αποκολλάται από την επιφάνεια και σχηματοποιείται πίσω από το σφαιρικό σωματίδιο. Με τον σχηματισμό στροβιλών, η πίεση στο σημείο αποκοπής μειώνεται περισσότερο, αυξάνοντας έτσι την οπισθέλκουσα. Για αυξανόμενους όμως αριθμούς  $Re$ , οι αρχικές δυνάμεις γίνονται σημαντικότερες και αυτό έχει σαν αποτέλεσμα ο συντελεστής οπισθέλκουσας να λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές από αυτή που προέβλεψε αρχικά ο Stokes. Ο Oseen επέκτεινε την ανάλυση του Stokes και κατέληξε στην παρακάτω σχέση, η οποία ισχύει για αριθμούς  $Re \leq 5$

$$c_D = \frac{24}{Re} \cdot \left( 1 + \frac{3}{16} Re \right) \quad (3.13)$$

Αν ανατρέξουμε στην βιβλιογραφία θα δούμε ότι υπάρχουν πολλές αναφορές για την

μεταβολή του συντελεστή οπισθέλκουσας ως συνάρτηση του αριθμού Re. Για αριθμούς Re κοντά στο 800 ο συντελεστής δίνεται από την σχέση Van Allen:

$$f = \left(1 + 0.15 \operatorname{Re}_p^{0.687}\right) \tag{3.14}$$

Η παραπάνω σχέση δίνει έναν συντελεστή οπισθέλκουσας με απόκλιση μικρότερη του 5% από τον τυπικό συντελεστή οπισθέλκουσας. Μια άλλη σχέση για υψηλούς αριθμούς Re είναι η κάτωθι:

$$f = 1 + \frac{\operatorname{Re}_p^{2/3}}{6} \qquad \operatorname{Re} < 1000 \tag{3.15}$$

$$f = 0.0183 \operatorname{Re}_p \qquad 1000 < \operatorname{Re} < 3 \times 10^5 \tag{3.16}$$

Επίσης μια πιο ακριβής σχέση μακριά από την περιοχή του υποκρίσιμου αριθμού Re είναι αυτή των Clift-Gauvin (1970), η οποία είναι μια επέκταση της εξίσωσης των Schiller-Naumann:

$$f = 1 + 0.15 \operatorname{Re}_p^{0.687} + 0.0175 \left(1 + 4.25 \times 10^4 \operatorname{Re}_p^{-1.16}\right)^{-1} \tag{3.17}$$

Αυτή η συσχέτιση δίνει ένα ταίριασμα για  $f$  μεταξύ  $\pm 6\%$  από την πειραματική τιμή πάνω από τον υποκρίσιμο αριθμό Re.

**Πίνακας 3.2 Τιμές συντελεστή οπισθέλκουσας**

Reynolds	Νόμος	Τιμή
$\operatorname{Re}_p < 1$	Stokes	$C_D = 24 \operatorname{Re}_p^{-1}$
$1 < \operatorname{Re}_p < 10^3$	Van Allen	$C_D = 24 \operatorname{Re}_p^{-1} (1 + 0.15 \operatorname{Re}_p^{0.687})$
$10^3 < \operatorname{Re}_p$	Newton	$c_D = 0.44$

### 3.3.2 Δυνάμεις επιτάχυνσης

Οι δυνάμεις που οφείλονται στην επιτάχυνση εξαιτίας της σχετικής ταχύτητας σωματιδίου-ρευστού μπορούν να διακριθούν στην εικονική ή φαινομενική της μάζας και στην δύναμη Basset. Όταν ένα σώμα επιταχύνεται μέσα σε ένα ρευστό υπάρχει μια επιτάχυνση απόκρισης του ρευστού η οποία δηλώνει την κατανάλωση του έργου από το σώμα. Αυτό το επιπρόσθετο έργο σχετίζεται με την πραγματική επίδραση μάζας. Η δύναμη που ασκεί το

σωματίδιο στο ρευστό δίνεται από την παρακάτω σχέση και είναι αντίθετη της έννοιας της δύναμης οπισθέλκουσας.

$$F_{um} = \frac{m_f}{2} \cdot \frac{du}{dt} \quad (3.18)$$

όπου,  $m_f$  είναι η μάζα του ρευστού που εκτοπίζεται από το σωματίδιο. Η σχετική επιτάχυνση του ρευστού σε σχέση με του σωματιδίου είναι  $\dot{u} - \dot{v}$ . Αν το ρευστό βρισκόταν σε ηρεμία, τότε η δύναμη της φαινομενικής μάζας στο σωματίδιο θα πρέπει να ήταν σε διεύθυνση αντίθετη αυτής της επιτάχυνσης του σωματιδίου. Η δράση της φαινομενικής μάζας στο σωματίδιο δίδεται από την σχέση:

$$F_{um} = \frac{\rho_f V_d}{2} \left( \dot{u} - \dot{v} \right) \quad (3.19)$$

Η δύναμη Basset σχετίζεται με την επιτάχυνση του σωματιδίου και αντιπροσωπεύει μια αντίσταση στις αλλαγές της ταχύτητας. Αυτή η δύναμη αναφέρεται στην αλληλεπίδραση ανάμεσα στην στιγμιαία επιτάχυνση και στο τροποποιημένο πεδίο της ροής. Η δύναμη Basset λαμβάνει υπόψη της την επίδραση του ιξώδους του ρευστού και οφείλεται στην προσωρινή καθυστέρηση της ανάπτυξης του οριακού στρώματος καθώς η σχετική ταχύτητα αλλάζει με τον χρόνο. Η δύναμη Basset είναι εξάγεται από τη σχέση:

$$F_{Basset} = \frac{3}{2} \cdot D^2 \cdot \sqrt{\pi \rho \mu} \cdot \int_0^t \frac{\dot{u} - \dot{v}}{\sqrt{t - t'}} dt' \quad (3.20)$$

Στην περίπτωση όπου υπάρχει μια αρχική ταχύτητα, ο όρος γίνεται:

$$F_{Basset} = \frac{3}{2} \cdot D^2 \cdot \sqrt{\pi \rho \mu} \cdot \left[ \int_0^t \frac{\dot{u} - \dot{v}}{\sqrt{t - t'}} dt' + \frac{(u - v)_0}{\sqrt{t}} \right] \quad (3.21)$$

όπου, το  $(u - v)_0$  είναι η διαφορά των αρχικών ταχυτήτων του σωματιδίου και του ρευστού.

### 3.3.3 Δυνάμεις ανύψωσης

Σε αυτή την κατηγορία δυνάμεων περιλαμβάνονται δύο επιφανειακές δυνάμεις που δρουν στην κατακόρυφη διεύθυνση της κίνησης του σωματιδίου και για αυτό ονομάζονται δυνάμεις ανύψωσης. Είναι οι δυνάμεις Saffman και Magnus. Η δύναμη Saffman είναι δύναμη ανύψωσης και οφείλεται στις κλίσεις της ταχύτητας του ρευστού γύρω από το σωματίδιο, το οποίο του δίνει

την τάση να περιστραφεί αλλά επίσης επιφέρει διαφορές ακτινικής πίεσης. Η δύναμη Saffman δίδεται από την σχέση:

$$F_s = 1.6 \cdot \rho_f \cdot d_p^2 \cdot (\gamma \cdot \nu_f)^{1/2} \cdot u \quad (3.22)$$

όπου  $\rho_f$  είναι η πυκνότητα του ρευστού,  $d_p$  η διάμετρος του σωματιδίου,  $\nu_f$  το ιξώδες του ρευστού,  $\gamma$  μια σταθερά και  $u$  η ταχύτητα

### 3.3.4 Η εξίσωση Basset-Boussinesq-Oseen

Εισάγοντας όλες τις δυνάμεις στην εξίσωση της κίνησης του σωματιδίου προκύπτει η εξίσωση Basset-Boussinesq-Oseen (BBO):

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = 3 \cdot \pi \cdot \mu \cdot D \cdot (u - v) + V_d \cdot (-\nabla p + \nabla \tau) + \frac{\rho_c}{2} \cdot \left( \dot{u} - \dot{v} \right) + \frac{3}{2} \cdot D^2 \cdot \sqrt{\pi \rho \mu} \cdot \left[ \int_0^t \frac{\dot{u} - \dot{v}}{\sqrt{t - t'}} dt' + \frac{(u - v)_0}{\sqrt{t}} \right] + m \cdot g \quad (3.23)$$

Στην παρούσα μελέτη ο υπολογισμός της τροχιάς των σωματιδίων γίνεται με τη μέθοδο Lagrange όπου το υπολογιστικό 'σωματίδιο' απεικονίζει ένα φυσικό σωματίδιο ή έναν αριθμό από ισομεγέθη σωματίδια. Η κίνηση του σωματιδίου περιγράφεται από την παρακάτω διανυσματική εξίσωση στην οποία έχουν συμπεριληφθεί μόνο οι δυνάμεις οπισθέλκουσας και βαρύτητας:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = f \cdot C_D \cdot \left| \vec{u} - \vec{v} \right| \cdot (\vec{u} - \vec{v}) + \vec{g} \quad (3.24)$$

όπου,  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  είναι η ταχύτητα της συνεχούς φάσης και του σωματιδίου, αντίστοιχα,  $\vec{g}$  η επιτάχυνση της βαρύτητας, και  $C_D$  ο συντελεστής οπισθέλκουσας του σωματιδίου:

$$C_D = \frac{24}{Re} \begin{cases} 1 + 0,15 Re_p & \text{για } Re \leq 1 \\ 1 + 0,15 Re_p^{0.687} & \text{για } Re > 1 \end{cases} \quad (3.25)$$

όπου, ο αριθμός Reynolds,  $Re_p$ , βασίζεται στην ταχύτητα ολίσθησης του σωματιδίου

$$Re_p = \frac{\rho_f}{\mu_f} D_p V_{slip} \quad (3.26)$$

όπου  $\mu_f$  είναι το ιξώδες του ρευστού και  $V_{slip}$ :

$$V_{slip} = [(u_r - v_r)^2 + (u_z - v_z)^2]^{1/2} \quad (3.27)$$

Αναλύοντας την εξίσωση (3.24) σε συνιστώσες προκύπτουν οι παρακάτω σχέσεις :

$$\frac{dv_r}{dt} = f \cdot C_D \cdot |u_r - v_r| \cdot (u_r - v_r) + g_r \quad (3.28)$$

$$\frac{dv_z}{dt} = f \cdot C_D \cdot |u_z - v_z| \cdot (u_z - v_z) + g_z \quad (3.29)$$

Ο συντελεστής  $f$  είναι σχετικός με τις ιδιότητες της συνεχούς και της διακριτής φάσης και για σφαιρικά σωματίδια δίνεται από τη σχέση:

$$f = \frac{3}{4} \frac{\rho_f \cdot g}{\rho_p \cdot D_p} \quad (3.30)$$

όπου  $\rho_f, \rho_p$  είναι οι πυκνότητες του ρευστού και του σωματιδίου αντίστοιχα, και  $D_p$  είναι η διάμετρος του σωματιδίου. Όταν το σωματίδιο χτυπήσει σε τοίχωμα γίνεται εναπόθεση του και σταματάει ο υπολογισμός του. Η ροή είναι αραιή έτσι ώστε η αλληλεπιδράσεις μεταξύ σωματιδίων να αγνοούνται.

### 3.3.5 Αδιάστατοι παράμετροι σωματιδίων

Ο αριθμός Reynolds για τη διακριτή φάση ορίζεται ως:

$$Re = \frac{\rho \cdot D \cdot |u - v|}{\mu} \quad (3.31)$$

Ο χρόνος απόκρισης ενός σωματιδίου στις αλλαγές της ταχύτητας είναι σημαντικός για τη διακριτή ροή. Ο χρόνος απόκρισης ορίζεται ως ο χρόνος που απαιτείται ώστε ένα σωματίδιο να ανταποκριθεί στην αλλαγή της ταχύτητας και δίνεται από τη σχέση:

$$\tau_V = \frac{\rho_d D^2}{18\mu} \quad (3.32)$$

Ο αριθμός Stokes είναι μια πολύ σημαντική παράμετρος στις ροές ρευστού-σωματιδίου και σχετίζεται με την ταχύτητα του σωματιδίου:

$$St_V = \frac{\tau_V}{\tau_F} \quad (3.33)$$

όπου το  $\tau_F$  είναι ο χαρακτηριστικός χρόνος του πεδίου ροής.



Αν  $St_r \ll 1$ , ο χρόνος απόκρισης των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερος από τον χαρακτηριστικό χρόνο που σχετίζεται με το πεδίο ροής. Έτσι τα σωματίδια θα έχουν άφθονο χρόνο να ανταποκριθούν στις αλλαγές της ταχύτητας ροής. Κατά συνέπεια το σωματίδιο και οι ταχύτητες του ρευστού θα είναι σχεδόν ίσες. Από την άλλη, αν  $St_r \gg 1$ , τότε τα σωματίδια δεν θα έχουν ουσιαστικά χρόνο να ανταποκριθούν στις αλλαγές της ταχύτητας του ρευστού και η ταχύτητες τους θα επηρεάζονται λιγότερο κατά την κίνησή τους.

### 3.3.6 Αραιές και πυκνές ροές

Μια διφασική ροή χαρακτηρίζεται ως αραιή όταν η κίνηση του σωματιδίου ελέγχεται κυρίως από τις δυνάμεις του ρευστού, ενώ πυκνή όταν η κίνηση του σωματιδίου ελέγχεται από τις συγκρούσεις μεταξύ τους. Ένας ποιοτικός υπολογισμός της φύσης αυτών των ροών μπορεί να γίνει με την σύγκριση του λόγου του χρόνου απόκρισης της ορμής ενός σωματιδίου προς τον χρόνο μεταξύ των συγκρούσεων. Έτσι μια ροή μπορεί να θεωρηθεί αραιή όταν  $\frac{\tau_r}{\tau_c} < 1$ ,

όπου  $\tau_c$  είναι ο μέσος όρος του χρόνου ανάμεσα στις συγκρούσεις σωματιδίων, για το λόγο ότι τα σωματίδια θέλουν συγκεκριμένο χρόνο για να ανταποκριθούν στις τοπικές δυνάμεις της ροής πριν την επόμενη σύγκρουση. Από την άλλη, αν  $\frac{\tau_r}{\tau_c} > 1$ , τότε το σωματίδιο δεν έχει χρόνο να

ανταποκριθεί στις δυνάμεις του ρευστού πριν την επόμενη σύγκρουση και η ροή είναι πυκνή.

Ο χρόνος ανάμεσα στις συγκρούσεις μπορεί να υπολογιστεί από εξισώσεις σχετικές με τη συχνότητα της σύγκρουσης. Έστω μια ομάδα σωματιδίων με ενιαία διάμετρο  $D$  όπως φαίνεται στο Σχήμα.3.2, μέσω της οποίας ένα σωματίδιο ταξιδεύει με σχετική ταχύτητα  $v_r$  σε σχέση με τα άλλα σωματίδια. Σε χρόνο  $\delta t$ , το ένα σωματίδιο θα εμποδίσει όλα τα άλλα σωματίδια στον αγωγό με ακτίνα  $2D$  και μήκος  $v_r \delta t$ . Ο αριθμός των σωματιδίων σε αυτό τον σωλήνα δίνεται από τη σχέση:

$$\delta N = n \cdot \pi \cdot D^2 \cdot v_r \cdot \delta t \quad (3.34)$$

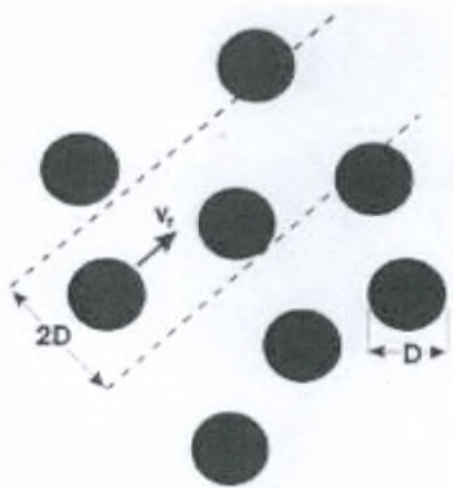
όπου  $n$  είναι ο αριθμός πυκνότητας των σωματιδίων.

Η συχνότητα σύγκρουσης των σωματιδίων δίνεται από τη σχέση:

$$f_c = n \cdot \pi \cdot D^2 \cdot v_r \quad (3.35)$$

και ο χρόνος ανάμεσα στις μεταξύ τους συγκρούσεις από τη σχέση:

$$\tau_c = \frac{1}{f_c} = \frac{1}{n \cdot \pi \cdot D^2 \cdot v_r} \quad (3.36)$$



**Σχήμα 3.2 Συγκρούσεις μεταξύ σωματιδίων**

Επομένως, διαιρώντας τις σχέσεις (3.32) και (3.36) κατά μέλη εξάγεται το πηλίκο του χρόνου απόκρισης του σωματιδίου προς το χρόνο μεταξύ των συγκρούσεων :

$$\frac{\tau_v}{\tau_c} = \frac{n \cdot \pi \cdot \rho_d \cdot D^4 \cdot v_r}{18 \cdot \mu} \quad (3.37)$$

$$\text{Ισχύει όμως : } \overline{m_d} = n \cdot m_p = n \cdot \rho_p \cdot V_p = n \cdot \rho_p \cdot \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot D_p^3 \quad (3.38)$$

όπου  $\overline{m_d}$  είναι η πυκνότητα μάζας της διακριτή φάσης.

Αντικαθιστώντας την (3.38) στην (3.37) προκύπτει ότι :

$$\frac{\tau_v}{\tau_c} = \frac{\overline{m_d} \cdot D \cdot v_r}{3 \cdot \mu} \quad (3.39)$$

Συμπερασματικά λοιπόν μπορούμε να πούμε ότι μια ροή θα θεωρείται αραιή, εάν:

$$\frac{\overline{\rho_d} \cdot D \cdot v_r}{3 \cdot \mu} < 1, \quad (3.40)$$

Από την παραπάνω σχέση αν λύσουμε ως προς D βρίσκουμε την συνθήκη που πρέπει να ικανοποιεί η διάμετρος του κάθε σωματιδίου ώστε μια ροή να θεωρείται αραιή:

$$D < \frac{3 \cdot \mu}{\rho_d \cdot v_r} = \frac{3 \cdot \mu}{Z \cdot \rho_e \cdot v_r} \quad (3.41)$$

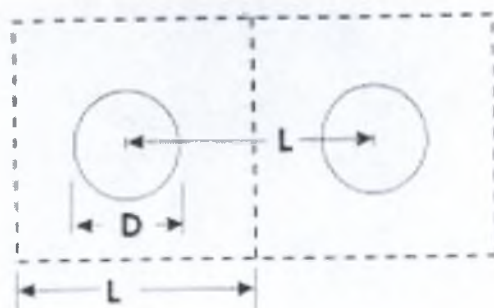
Όπου  $\rho_e$  είναι η πυκνότητα της φάσης μεταφοράς και  $Z$  το φορτίο

### 3.3.7 Απόσταση σωματιδίων

Ο μηχανισμός επίδρασης της διακριτής φάσης μιας ροής εξαρτάται σημαντικά από τον μέσο όρο της απόστασης ανάμεσα στα στοιχεία της διακριτής φάσης και καθορίζει αν ένα σωματίδιο ή σταγονίδιο μπορεί να θεωρηθεί ως ένα μονωμένο στοιχείο.

Έστω δύο σωματίδια, τα οποία βρίσκονται μέσα σε κύβους πλευράς  $L$ , η οποία είναι και η απόσταση ανάμεσα στα κέντρα τους. Το κλάσμα του όγκου της διακριτής φάσης δίνεται από την σχέση:

$$a_d = \frac{\pi \cdot D^3}{6 \cdot L^3} \quad (3.42)$$



Σχήμα 3.3 Απόσταση μεταξύ σωματιδίων

Αν λύσουμε την σχέση (3.42) ως προς  $L/D$  προκύπτει:

$$\frac{L}{D} = \left( \frac{\pi}{6a_d} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (3.43)$$

όπου  $a_d$  είναι το διακριτό κλάσμα της φάσης

Παραδείγματος χάρη για διακριτό κλάσμα όγκου 10%, δηλαδή για  $a_d = 0.1$  προκύπτει ότι η απόσταση μεταξύ των σωματιδίων είναι 1,736 της διαμέτρου του καθενός από αυτά και υποδεικνύει ότι τα στοιχεία της διακριτής φάσης είναι πολύ κοντά για να θεωρούνται μονωμένα. Επομένως, η μάζα, η ορμή και η μεταφορά θερμότητας για κάθε στοιχείο επηρεάζεται από τα γειτονικά στοιχεία.

## 4 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΑ ΜΟΝΤΕΛΑ

### 4.1 Ο αλγόριθμος επίλυσης

Η διακριτοποίηση των εξισώσεων (3.1) μέχρι (3.4) στο χώρο γίνεται με κεντρικές πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης ακρίβειας. Η ολοκλήρωση στο χρόνο πραγματοποιείται σε τρία βήματα με βάση τη ρητή μέθοδο χαμηλής αποθήκευσης (low storage) Runge-Kutta 3<sup>ης</sup> τάξης για τους μη γραμμικούς όρους συναγωγής και για τις επιπλέον εξωτερικές δυνάμεις, ενώ για τους γραμμικούς όρους διάχυσης χρησιμοποιείται πεπλεγμένο σχήμα Crank-Nicolson 2<sup>ης</sup> τάξης ακρίβειας. Οι εξισώσεις ορμής παραγοντοποιούνται και επιλύονται σε τρία στάδια. Η ικανοποίηση της εξίσωσης συνέχειας στο νέο χρονικό βήμα επιτυγχάνεται μέσω της επίλυσης της εξίσωσης Poisson για την ψευδοπίεση. Η επίλυση της εξίσωσης Poisson γίνεται με μετασχηματισμό Fourier (FFT) στις περιοδικές διευθύνσεις μαζί με την επίλυση τριδιαγώνιου συστήματος στην κάθετη διεύθυνση των τοιχωμάτων.

### 4.2 Χωρική διακριτοποίηση

Η χωρική διακριτοποίηση των εξισώσεων Navier-Stokes δημιουργεί το ακόλουθο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_1}{\partial t} + g_{2m} \cdot \frac{\delta q_1 / r_m q_2}{\delta x_2} + \frac{1}{r_m^2} \cdot \frac{\delta q_1 q_1}{\delta x_1} + \frac{\delta q_1 q_3}{\delta x_3} + \frac{q_1 q_2}{r_m^2} + N \cdot q_2 = \\ - \frac{\delta P}{\delta x_1} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left( g_{2m} \cdot \frac{\delta}{\delta x_2} r_c g_{2c} \frac{\delta q_1 / r_m q_2}{\delta x_2} - \frac{q_1}{r_m^2} + \frac{1}{r_m^2} \cdot \frac{\delta^2 q_1}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 q_1}{\delta x_3^2} + \frac{2}{r_m^2} \cdot \frac{\delta q_2}{\delta x_1} \right) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_2}{\partial t} + g_{2m} \cdot \frac{\delta q_2 q_2}{\delta x_2} + g_{2m} \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{q_2^2}{r_c} + \frac{\delta}{\delta x_1} \frac{q_1 q_2}{r_m r_c} + \frac{\delta q_2 q_3}{\delta x_3} + \frac{q_1^2}{r_c^2} - N \cdot q_1 = \\ - r_c g_{2c} \frac{\delta P}{\delta x_2} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left( g_{2c} \cdot \frac{\delta}{\delta x_2} r_c g_{2c} \frac{\delta q_2 / r_c}{\delta x_2} - \frac{q_2}{r_c^2} + \frac{1}{r_c^2} \cdot \frac{\delta^2 q_2}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 q_2}{\delta x_3^2} - \frac{2}{r_c^2} \cdot \frac{\delta q_1}{\delta x_1} \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

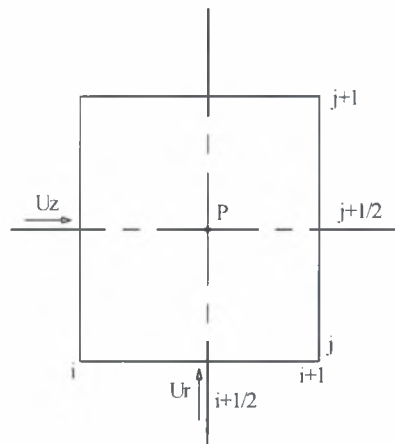
$$\frac{\partial q_3}{\partial t} + \frac{g_{2m}}{r_m} \cdot \frac{\delta q_2 q_3}{\delta x_2} + \frac{1}{r_m^2} \frac{\delta q_1 q_3}{\delta x_1} + \frac{\delta q_3 q_3}{\delta x_3} =$$

$$-\frac{\delta P}{\delta x_3} - \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \cdot \left( \frac{g_{2m}}{r_m} \cdot \frac{\delta}{\delta x_2} g_{cr_c} \frac{\delta q_3}{\delta x_2} + \frac{1}{r_m^2} \cdot \frac{\delta^2 q_3}{\delta x_1^2} + \frac{\delta^2 q_3}{\delta x_3^2} \right) \quad (4.3)$$

όπου  $\delta$  είναι ο τελεστής διακριτοποίησης κεντρικών διαφορών δεύτερης τάξης ακρίβειας. Επίσης η μεταβλητή  $x_1$  αντιστοιχεί στην συντεταγμένη  $\theta$ , η αξονική διεύθυνση  $z$  ταυτίζεται με την μεταβλητή  $x_3$  και η ακτινική διεύθυνση  $r$  με την  $x_2$ . Για τον υπολογισμό των παραγώγων κατά την ακτινική διεύθυνση έγινε ο μετασχηματισμός:  $r = r(x_2)$ . Ο δείκτης  $c$  δείχνει τους κόμβους και  $m$  είναι το μεσαίο σημείο στο 'μέτωπο' του κελιού. Με αυτές τις διευκρινήσεις το σύστημα των εξισώσεων (3.1) μέχρι (3.4) κατέληξε στο παραπάνω σύστημα όπου  $q_1 = q_\theta$ ,  $q_2 = q_r$  και  $q_3 = q_z$ .

#### 4.2.1 Μετατοπισμένο πλέγμα (staggered grid)

Το υπολογιστικό πλέγμα που χρησιμοποιείται (Σχήμα 4.1) είναι μετατοπισμένο (staggered grid) που σημαίνει ότι η ταχύτητα  $u$  αποθηκεύεται στα σημεία  $(i, j+1/2, k+1/2)$ , η  $v$  ταχύτητα αποθηκεύεται στα σημεία  $(i+1/2, j, k+1/2)$ , η  $w$  ταχύτητα στα σημεία  $(i+1/2, j+1/2, k)$  και τα βαθμωτά μεγέθη, όπως η πίεση, στα σημεία  $(i+1/2, j+1/2, k+1/2)$ .



Σχήμα 4.1 Μετατοπισμένο πλέγμα

#### 4.2.2 Διακριτοποίηση στην περιοχή του άξονα συμμετρίας

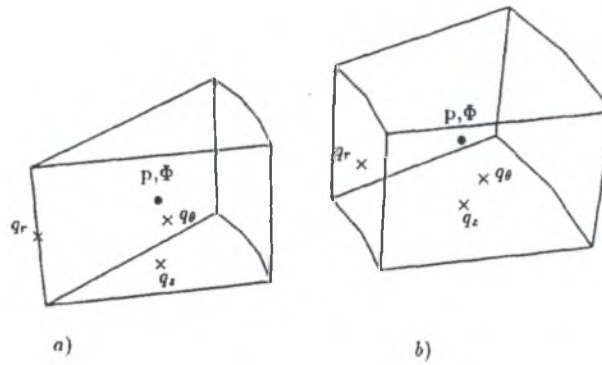
Η ειδική διακριτοποίηση της περιοχής γύρω από το  $r=0$  είναι το πιο χαρακτηριστικό γνώρισμα της μεθόδου ‘Εμπλεγμένου συνόρου’ γιατί επιτρέπει να ξεπεραστούν δυσκολίες που σχετίζονται με την απροσδιοριστία των παραγώγων των ταχυτήτων (singularity point) καθώς και με την ακρίβεια του αριθμητικού σχήματος. Στην περίπτωση χρησιμοποιείται ένα μετατοπισμένο πλέγμα στο οποίο υπολογίζεται το  $q_r$  μόνο στο σημείο  $j=1$  ( $r=0$ ) στο οποίο ισχύει ότι  $q_r \equiv q_2 = 0$  από υπόθεση (Σχήμα 4.2). Η μεταβλητή  $q_2$  διακριτοποιείται με κατάντη διαφορές για τα σημεία του πλέγματος που ισχύει  $n_2 - 1 > j > 2$ . Οι μεταβλητές  $q_3$  και  $q_1$  στο σημείο  $j = \frac{3}{2}$  απαιτούν τον υπολογισμό της παραγώγου στην ακτινική διεύθυνση στην περιοχή γύρω από το  $r=0$ . Επειδή στους όρους συναγωγής  $(\frac{g_{2m}}{r_m} \frac{\delta}{\delta x_2} r_c g_{2c} \frac{\delta q_3}{\delta x_2})$  στο σημείο  $j=1$  το  $q_2 = 0$  υπολογίζονται οι παράγωγοι κατά την ακτινική διεύθυνση για το  $q_1$  και το  $q_3$  στο σημείο  $j = \frac{3}{2}$  που είναι εύκολο.

$$\left. \frac{g_{2m}}{r_m} \frac{\delta}{\delta x_2} r_c g_{2c} \frac{\delta q_3}{\delta x_2} \right|_{j=\frac{3}{2}} = \frac{(g_2)_{\frac{3}{2}}}{r_{\frac{3}{2}}} \left[ r_2 (g_2)_2 \frac{(q_3)_{\frac{5}{2}} - (q_3)_{\frac{3}{2}}}{\Delta r^2} \right] \quad (4.4)$$

Η πρώτη και δεύτερη παράγωγος του  $q_1$  του ιξώδους όρου, όπως εκφράζεται από την παρακάτω σχέση, δεν αντιμετωπίζει πρόβλημα ακόμα και στο σημείο  $r=0$  και παραμένει να είναι δεύτερης τάξης ακρίβεια

$$\left. \frac{\delta}{\delta r} r \frac{\delta q_\theta}{\delta r} - \frac{q_\theta}{r^2} \right|_{j=\frac{3}{2}} = (g_2)_{\frac{3}{2}} \left[ r_2 (g_2)_2 \frac{(q_1)_{\frac{5}{2}} - (q_1)_{\frac{3}{2}}}{\Delta x_2^2} \right] - \frac{(q_1)_{\frac{3}{2}}}{(r_{3/2})^2} \quad (4.5)$$





Σχήμα 4.2 Υπολογιστικά κελιά α) στον άξονα b) στον υπόλοιπο χώρο

#### 4.2.3 Διακριτοποίηση μη γραμμικών όρων συναγωγής

Οι μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης της *u*-ορμής διακριτοποιούνται ως εξής:

Η προσέγγιση της πρώτης παραγώγου για την κατεύθυνση  $x_1$  γίνεται με κεντρικές διαφορές όπως φαίνεται από την παρακάτω εξίσωση:

$$\left. \frac{\partial q_1 q_1}{\partial x_1} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta q_1 q_1}{\delta x_1} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_1} \left[ (q_1 q_1)_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} - (q_1 q_1)_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.6)$$

όπου

$$q_{1,i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ q_{1,i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + q_{1,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.7)$$

$$q_{1,i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left[ q_{1,i-1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + q_{1,i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.8)$$

Όσον αφορά την κατεύθυνση  $x_3$  η προσέγγιση της πρώτης παραγώγου στηρίζεται σε κατάντη ή εμπρός διαφορές (forward)

$$\left. \frac{\partial q_3 q_1}{\partial x_3} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \approx \left. \frac{\delta q_3 q_1}{\delta x_3} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_3} \left[ (q_3 q_1)_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - (q_3 q_1)_{i,j+\frac{1}{2},k} \right] \quad (4.9)$$

όπου

$$q_{3_{i,j+\frac{1}{2},k+1}} = \frac{1}{2} \left[ q_{3_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1}} + q_{3_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k+1}} \right] \quad (4.10)$$

$$q_{1_{i,j+\frac{1}{2},k+1}} = \frac{1}{2} \left[ q_{1_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{3}{2}}} + q_{1_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.11)$$

και

$$q_{3_{i,j+\frac{1}{2},k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{3_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}} + q_{3_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}} \right] \quad (4.12)$$

$$q_{1_{i,j+\frac{1}{2},k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{1_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} + q_{1_{i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.13)$$

Όμοια, οι κατάντη διαφορές χρησιμοποιούνται και για την προσέγγιση της πρώτης παραγώγου στην κατεύθυνση  $x_2$

$$\left. \frac{\partial q_2 q_1}{\partial x_2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta q_2 q_1}{\delta x_2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_2} \left[ (q_2 q_1)_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - (q_2 q_1)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.14)$$

όπου

$$q_{2_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left[ q_{2_{i+\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}}} + q_{2_{i-\frac{1}{2},j+1,k+\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.15)$$

$$q_{1_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left[ q_{1_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} + q_{1_{i,j+\frac{3}{2},k+\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.16)$$

και

$$q_{2_{i,j,k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left[ q_{2_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}} + q_{2_{i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.17)$$

$$q_{1_{i,j,k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left[ q_{1_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} + q_{1_{i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.18)$$

Η σχέση ισχύει για ομοιόμορφο πλέγμα στην  $y$ -διεύθυνση. Στην περίπτωση που χρησιμοποιείται ανομοιόμορφο πλέγμα η σχέση μετατρέπεται σε:

$$\left. \frac{\partial q_2 q_1}{\partial x_2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \left. \frac{\delta q_2 q_1}{\delta x_2} \right|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_2 c_j} \left[ (q_2 q_1)_{i,j+1,k+\frac{1}{2}} - (q_2 q_1)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.19)$$

$$\acute{\omicron}\text{που } c_j = \frac{y_{j+1} - y_j}{y_{j+\frac{1}{2}} - y_{j-\frac{1}{2}}} \quad (4.20)$$

είναι μία ποσότητα που λαμβάνει υπόψη το ανομοιόμορφο πλέγμα.

Οι μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης της *w-ορμής* διακριτοποιούνται ως εξής:

$$\text{Κατάντη διαφορές: } \left. \frac{\partial q_1 q_3}{\partial x_1} \right|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{\delta q_1 q_3}{\delta x_1} \bigg|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{1}{\Delta x_1} \left[ (q_1 q_3)_{i+1, j+\frac{1}{2}, k} - (q_1 q_3)_{i, j+\frac{1}{2}, k} \right] \quad (4.21)$$

όπου

$$q_{3_{i+1, j+\frac{1}{2}, k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{3_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}} + q_{3_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}, k}} \right] \quad (4.22)$$

$$q_{1_{i+1, j+\frac{1}{2}, k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{1_{i+1, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}} + q_{1_{i+1, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.23)$$

και

$$q_{3_{i, j+\frac{1}{2}, k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{3_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}} + q_{3_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}} \right] \quad (4.24)$$

$$q_{1_{i, j+\frac{1}{2}, k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{1_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}} + q_{1_{i, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.25)$$

$$\text{Κεντρικές διαφορές: } \left. \frac{\partial q_3 q_3}{\partial x_3} \right|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} \approx \frac{\delta q_3 q_3}{\delta x_3} \bigg|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{1}{\Delta x_3} \left[ (q_3 q_3)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - (q_3 q_3)_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.26)$$

όπου

$$q_{3_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left[ q_{3_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+1}} + q_{3_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}} \right] \quad (4.27)$$

$$q_{3_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2} \left[ q_{3_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}} + q_{3_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-1}} \right] \quad (4.28)$$

$$\text{Κατάντη διαφορές: } \left. \frac{\partial q_2 q_3}{\partial x_2} \right|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{\delta q_2 q_3}{\delta x_2} \bigg|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{1}{\Delta x_2} \left[ (q_2 q_3)_{i+\frac{1}{2}, j+1, k} - (q_2 q_3)_{i+\frac{1}{2}, j, k} \right] \quad (4.29)$$

$$q_{2_{i+\frac{1}{2}, j+1, k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{2_{i+\frac{1}{2}, j+1, k+\frac{1}{2}}} + q_{2_{i+\frac{1}{2}, j+1, k-\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.30)$$

$$q_{3_{i+\frac{1}{2},j+1,k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{3_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}} + q_{3_{i+\frac{1}{2},j+\frac{3}{2},k}} \right] \quad (4.31)$$

και

$$q_{2_{i+\frac{1}{2},j,k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{2_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}}} + q_{2_{i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.32)$$

$$q_{3_{i+\frac{1}{2},j,k}} = \frac{1}{2} \left[ q_{3_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k}} + q_{3_{i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k}} \right] \quad (4.33)$$

Όμοια, για μη ανομοιόμορφα πλέγματα στην y-διεύθυνση προκύπτουν οι σχέσεις :

$$\text{Κατάντη διαφορές : } \frac{\partial q_2 q_3}{\partial x_2} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{\delta q_2 q_3}{\delta x_2} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} = \frac{1}{\Delta x_2 c_j} \left[ (q_2 q_3)_{i+\frac{1}{2},j+1,k} - (q_2 q_3)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \quad (4.34)$$

όπου το  $c_j$  δίνεται από τη σχέση (4.20)

Οι μη γραμμικοί όροι της εξίσωσης ν-ορμής διακριτοποιούνται όλοι με κατάντη διαφορές ως εξής:

$$\frac{\partial q_1 q_2}{\partial x_1} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\delta q_1 q_2}{\delta x_1} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_1} \left[ (q_1 q_2)_{i+1,j,k+\frac{1}{2}} - (q_1 q_2)_{i,j,k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial q_3 q_2}{\partial x_3} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \approx \frac{\delta q_3 q_2}{\delta x_3} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_3} \left[ (q_3 q_2)_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - (q_3 q_2)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial q_2 q_2}{\partial x_2} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} \approx \frac{\delta q_2 q_2}{\delta x_2} \bigg|_{i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta z} \left[ (q_2 q_2)_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - (q_2 q_2)_{i+\frac{1}{2},j,k} \right] \quad (4.37)$$

#### 4.2.4 Διακριτοποίηση γραμμικών όρων διάχυσης

Η διακριτοποίηση των γραμμικών όρων διάχυσης γίνεται με κεντρικές διαφορές όπως φαίνεται από τις παρακάτω εξισώσεις :

$$\text{u-ορμή: } \frac{\partial^2 q_1}{\partial x_1^2} \bigg|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{\delta^2 q_1}{\delta x_1^2} \bigg|_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_1^2} \left[ q_{1_{i+1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} - 2q_{1_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} + q_{1_{i-1,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \right] \quad (4.38)$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial x_3^2} \Big|_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = \frac{\delta^2 q_1}{\delta x_3^2} \Big|_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_3^2} \left[ q_{1, j+\frac{1}{2}, k+\frac{3}{2}} - 2q_{1, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} + q_{1, j+\frac{1}{2}, k-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.39)$$

$$\text{v-ορμή: } \frac{\partial^2 q_2}{\partial x_1^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} = \frac{\delta^2 q_2}{\delta x_1^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_1^2} \left[ q_{2, i+\frac{3}{2}, j, k+\frac{1}{2}} - 2q_{2, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} + q_{2, i-\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} \right] \quad (4.40)$$

$$\frac{\partial^2 q_2}{\partial x_3^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} = \frac{\delta^2 q_2}{\delta x_3^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta x_3^2} \left[ q_{2, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{3}{2}} - 2q_{2, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} + q_{2, i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}} \right] \quad (4.41)$$

$$\text{w-ορμή: } \frac{\partial^2 q_3}{\partial x_1^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{\delta^2 q_3}{\delta x_1^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{1}{\Delta x_1^2} \left[ q_{3, i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - 2q_{3, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} + q_{3, i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} \right] \quad (4.42)$$

$$\frac{\partial^2 q_1}{\partial x_3^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{\delta^2 q_1}{\delta x_3^2} \Big|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{1}{\Delta x_3^2} \left[ q_{1, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k+1} - 2q_{1, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} + q_{1, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k-1} \right] \quad (4.43)$$

### 4.3 Χρονική διακριτοποίηση

Η χρονική ολοκλήρωση περιέχει τρεις χρονικές στιγμές, την n-1, n και n+1. Το πρώτο βήμα την στιγμή n είναι:

$$\frac{\hat{u}_i^k - u_i^n}{\Delta t} = \gamma^k H_i^n + \rho^k H_i^{n-1} + \frac{\alpha^k}{2\text{Re}} L_{ij} (\hat{u}_i^k + u_i^n) - \alpha^k G_i p^n \sigma_i \quad (4.44)$$

όπου  $\gamma$ ,  $\rho$ ,  $\alpha$ ,  $\sigma_i$  είναι σταθερές της μεθόδου χρονικής ολοκλήρωσης Runge-Kutta 3<sup>ης</sup> τάξης,  $H_i$  είναι οι μη γραμμικοί όροι συναγωγής γραμμένοι σε συντηρητική μορφή και οι επιπλέον εξωτερικές δυνάμεις, το  $L_{ij}$  είναι ο τελεστής Laplacian, και  $G_i$  είναι ο τελεστής κλίσης βαθμωτού μεγέθους,  $k$  είναι η ενδιάμεση χρονική στιγμή n και n+1.

Η εξίσωση (4.47) μπορεί να γραφτεί για την διαφορά των ταχυτήτων  $\Delta u_i = (u^k - u^n)_i$ :

$$\Delta u_i - \beta^k L_{ij} \Delta u_i = (\gamma^k H_i^n + \rho^k H_i^{n-1} - \alpha^k G_i p^n \sigma_i) \Delta t + 2\beta^k L_{ij} u_i^n \quad (4.45)$$

$$\text{όπου } \beta = \alpha / (2\text{Re}) \quad (4.46)$$

Το ενδιάμεσο πεδίο ταχυτήτων (την k χρονική στιγμή) ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας ολικά αλλά όχι τοπικά. Το δεύτερο βήμα είναι η πρόβλεψη ενός divergence-free πεδίου ταχυτήτων. Αυτό επιτυγχάνεται μέσω μιας βαθμωτής ποσότητας  $\Phi$ , η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό της ταχύτητας στο χρονικό βήμα n+1, με βάση την εξίσωση:

$$\frac{u_i^{n+1} - \bar{u}_i^k}{\Delta t} = -\alpha^k G_i \phi \sigma_2 \quad (4.47)$$

Αν στην παραπάνω εξίσωση εφαρμοστεί η απόκλιση και χρησιμοποιηθεί ότι  $\nabla U_i^{n+1} = 0$  τότε προκύπτει μία ελλειπτικής μορφής εξίσωση που επιτρέπει τον υπολογισμό της ποσότητας  $\phi$ .

$$L_{jj} \phi = \frac{\sigma_2}{\alpha^k \Delta t} D_i \bar{u}_i^k \quad (4.48)$$

Με την επίλυση της παραπάνω εξίσωσης και αντικαθιστώντας την ποσότητα  $\phi$  στην εξίσωση (4.46) προκύπτει το νέο πεδίο ταχυτήτων την χρονική στιγμή  $n+1$ , το οποίο ικανοποιεί και την εξίσωση συνέχειας της μάζας.

Σε όλη τη διαδικασία που παρουσιάστηκε προηγουμένως η γνώση άρα και ο υπολογισμός της πίεσης δεν ήταν απαραίτητος. Παρόλα αυτά, σε περιπτώσεις που είναι απαραίτητη η γνώση της πίεσης αυτή δίνεται με βάση την ποσότητα  $\phi$  και από την σχέση:

$$p^{n+1} = p^n + \phi - \beta L_{jj} \phi \quad (4.49)$$

και επομένως η πτώση πίεσης στην εξίσωση (4.46) είναι:

$$-G_i [p^n (\sigma_1 - \sigma_2) + p^{n+1} \sigma_2] \quad (4.50)$$

#### 4.4 Παραγοντοποίηση των εξισώσεων ορμής

Οι παραπάνω εξισώσεις μπορεί να γραφτούν υπό τη μορφή:

$$[1 - \beta^k (L_{i1} - L_{i1} - L_{i1})] \Delta u_i = RHS_i \quad (4.51)$$

Η παραγοντοποίηση συνίσταται στην αντικατάσταση του αριστερού μέλους της εξίσωσης (4.54) με το γινόμενο τριών πινάκων. Ορίζοντας  $A_{ij} = \beta^k L_{ij}$  η εξίσωση (4.51) γίνεται:

$$(1 - A_{i1})(1 - A_{i2})(1 - A_{i3}) \Delta u_i = RHS_i \quad (4.52)$$

Η εξίσωση μπορεί να γραφτεί ως:

$$(1 - A_{i1}) \Delta u_i^{**} = RHS_i \quad (4.53)$$

$$(1 - A_{i3}) \Delta u_i^* = \Delta u_i^{**} \quad (4.54)$$

$$(1 - A_{i2}) \Delta u_i = \Delta u_i^* \quad (4.55)$$

όπου  $\Delta u_i^{**}$  και  $\Delta u_i^*$  είναι ενδιάμεσες ποσότητες χωρίς κανένα φυσικό νόημα.



#### 4.5 Υπολογισμός της ψευδοπίεσης - Επίλυση της εξίσωσης Poisson

Το πεδίο ταχυτήτων πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας της μάζας σε κάθε χρονικό βήμα. Η εξίσωση για την ψευδοπίεση φ είναι:

$$L_{ij}\phi = \frac{\sigma_2}{\alpha^k \Delta t} D_i \hat{u}_i^k \quad (4.56)$$

ή

$$(L_{11} + L_{22} + L_{33})\phi_{ijl} = \frac{\sigma_2}{\alpha^k \Delta t} F_{ijl} \quad (4.57)$$

όπου  $F_{ijl}$

$$F_{i,j,l} = \left. \frac{\partial \hat{u}^k}{\partial x} \right|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial \hat{v}^k}{\partial y} \right|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} + \left. \frac{\partial \hat{w}^k}{\partial z} \right|_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} \quad (4.58)$$

Η εξίσωση (4.57) σε διακριτοποιημένη μορφή, χρησιμοποιώντας κεντρικές πεπερασμένες διαφορές δεύτερης τάξης ακρίβειας για τις δεύτερες παραγώγους:

$$\begin{aligned} & \frac{\Phi_{i+\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} - 2\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} + \Phi_{i-\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}}{\Delta x_1^2} + \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{3}{2}, l+\frac{1}{2}} - 2\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} + \Phi_{i+\frac{1}{2}, j-\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}}{\Delta x_2^2} + \\ & \frac{\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l+\frac{3}{2}} - 2\Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}} + \Phi_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l-\frac{1}{2}}}{\Delta x_3^2} = \\ & \frac{\sigma_2}{\alpha^k \Delta t} \left( \frac{\hat{u}_{i+1, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}^k - \hat{u}_{i, j+\frac{1}{2}, l+\frac{1}{2}}^k}{\Delta x_1} + \frac{\hat{v}_{i+\frac{1}{2}, j+1, l+\frac{1}{2}}^k - \hat{v}_{i+\frac{1}{2}, j, l+\frac{1}{2}}^k}{\Delta x_2} + \frac{\hat{w}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l+1}^k - \hat{w}_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, l}^k}{\Delta x_3} \right) \end{aligned} \quad (4.59)$$

Λόγω της περιοδικότητας, μπορεί να χρησιμοποιηθούν σειρές Fourier στις διευθύνσεις x και z για τις ποσότητες Φ και F:

$$\Phi_{i,j,l} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \hat{\Phi}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 x_i}{L_x}} e^{\frac{i2\pi k_3 x_3}{L_z}} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \hat{\Phi}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 i}{N_1}} e^{\frac{i2\pi k_3 j}{N_3}} \quad (4.60)$$

$$F_{i,j,l} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \hat{F}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 x_i}{L_x}} e^{\frac{i2\pi k_3 x_3}{L_z}} = \sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \hat{F}(k_1, j, k_3) e^{\frac{i2\pi k_1 i}{N_1}} e^{\frac{i2\pi k_3 j}{N_3}} \quad (4.61)$$

Η εξίσωση (4.57) μετατρέπεται τελικά σε:

$$\sum_{k_1=-N_1/2}^{N_1/2+1} \sum_{k_3=0}^{N_3} \left[ \hat{\Phi}(k_1^{(2)}, j, k_3^{(2)}) - \hat{F}(k_1^{(2)}, j, k_3^{(2)}) \right] e^{\frac{i2\pi k_1 i}{N_1}} e^{\frac{i2\pi k_3 j}{N_3}} \quad (4.62)$$

όπου  $k_1'^2, k_3'^2$  είναι οι τροποποιημένοι κυματαριθμοί που προκύπτουν από τη χρήση των κεντρικών πεπερασμένων διαφορών για την δεύτερη παράγωγο:

$$k_1'^2 = \frac{2 \left( \cos \frac{2\pi k_1}{N_1} - 1 \right)}{\Delta x_1^2}, k_3'^2 = \frac{2 \left( \cos \frac{2\pi k_3}{N_3} - 1 \right)}{\Delta x_3^2} \quad (4.63)$$

#### 4.6 Επίλυση εξισώσεων σωματιδίων

Θεωρώντας ότι η μάζα παραμένει σταθερή κατά τη διάρκεια ενός χρονικού βήματος, οι εξισώσεις κίνησης των σωματιδίων μπορούν να διατυπωθούν με μια απλή διανυσματική εξίσωση:

$$m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma \vec{F} \quad (4.64)$$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στο σωματίδιο είναι:

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F}_D + \vec{B} \quad (4.65)$$

Η δύναμη της οπισθέλκουσας  $\vec{F}_D$  υπολογίζεται από την σχέση :

$$\vec{F}_D = f \cdot (\vec{u} - \vec{v}) \quad (4.66)$$

όπου για σφαιρικά σωματίδια:

$$f = 3 \cdot \pi \cdot \mu_g \cdot F_D \cdot C_D \cdot \frac{Re}{24} \quad (4.67)$$

Το βάρος του σωματιδίου  $\vec{B}$  υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{B} = (\rho_p - \rho_{fluid}) \cdot Vol \cdot \vec{g} = (m_p - m_{fluid}) \cdot \vec{g} \quad (4.68)$$

όπου  $\rho_p$  είναι η πυκνότητα του σωματιδίου,  $\rho_{fluid}$  η πυκνότητα του ρευστού, Vol ο όγκος του κάθε σωματιδίου (στην περίπτωση σφαιρικών σωματιδίων ισούται με  $\pi/6 D_p^3$ ) και  $\vec{g}$  το διάνυσμα της βαρύτητας.

Αντικαθιστώντας τις παραπάνω εξισώσεις στην θεμελιώδη εξίσωση προκύπτει:

$$m_p \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = f \cdot (\vec{u} - \vec{v}) + (m_p + m_{fluid}) \cdot \vec{g} \quad (4.69)$$

και τελικά

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{f \cdot \vec{v}}{m_p} + \frac{f \cdot \vec{u} + (m_p - m_{fluid}) \cdot \vec{g}}{m_p} \quad (4.70)$$

Υποθέτοντας ότι το  $f$  είναι σταθερό σε μικρά χρονικά διαστήματα, η παραπάνω εξίσωση γίνεται μια συνήθης γραμμική διαφορική εξίσωση πρώτης τάξης, της μορφής:

$$\frac{d\vec{x}}{d\vec{y}} + P\vec{x} = \vec{Q} \quad (4.71)$$

Η τελική λύση είναι :

$$\vec{x} = \vec{x}_o \cdot e^{-P \cdot \Delta t} + \frac{\vec{Q}}{P} (1 - e^{-P \cdot \Delta t}) \quad (4.72)$$

$$\text{με } \Delta t = t - t_0 \quad (4.73)$$

Οι τιμές  $P$  και  $\vec{Q}$  στην εξίσωση της ορμής των σωματιδίων είναι:

$$P = -\frac{f}{m_p} \quad (4.74)$$

$$\vec{Q} = \frac{f \cdot \vec{u} + (m_p - m_{fluid}) \cdot \vec{g}}{m_p} \quad (4.75)$$

Έτσι, για μικρά χρονικά διαστήματα, η ταχύτητα των σωματιδίων υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\vec{u}(t_0 + \Delta t) = \vec{u}_o \cdot e^{-P \cdot \Delta t} + \frac{\vec{Q}}{P} (1 - e^{-P \cdot \Delta t}) \quad (4.76)$$

Οι συντελεστές  $P$  και  $\vec{Q}$  της παραπάνω συνάρτησης υπολογίζονται στον αρχικό χρόνο  $t_0$ .

Οι εξισώσεις Lagrange για την κίνηση των σωματιδίων είναι συνήθεις διαφορικές εξισώσεις οι οποίες μπορούν να διατυπωθούν με την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{d\Phi_p}{dt} = \frac{1}{A}(\Phi_g - \Phi_p) + B \quad (4.77)$$

όπου  $\Phi_g, \Phi_d$  = Ιδιότητες  $\Phi$  για το ρευστό και τα σωματίδια, αντίστοιχα,  $A$  και  $B$  είναι συντελεστές που σχετίζονται με τη διαδικασία προσομοίωσης.

Με την προϋπόθεση ότι το  $\Phi_g$  παραμένει αμετάβλητο κατά την διάρκεια του χρονικού βήματος ολοκλήρωσης της εξίσωσης μεταφοράς, προκύπτει η τιμή νέα  $\Phi_p$  στο χρόνο  $t + \Delta t$ :

$$\Phi_p = \Phi_g - (\Phi_g - \Phi_p^*) \exp(-\Delta t/A) + A B (1 - \exp(-\Delta t/A)) \quad (4.78)$$

Όπου  $\Delta t$  είναι το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης και  $\Phi_p^*$  η παλιά τιμή  $\Phi$  στο χρόνο  $t$ .

Αφού υπολογιστούν οι νέες συνιστώσες της ταχύτητας στο χρόνο  $t + \Delta t$ , η νέα θέση του σωματιδίου υπολογίζεται από τις παρακάτω σχέσεις:

$$x = x^* + (U_d^* + U_d)\Delta t/2 \quad (4.79)$$

$$y = y^* + (V_d^* + V_d)\Delta t/2 \quad (4.80)$$

$$z = z^* + (W_d^* + W_d)\Delta t/2 \quad (4.81)$$

όπου ο αστερίσκος (\*) αναφέρεται σε ποσότητες στο προηγούμενο χρονικό βήμα.

#### 4.7 Εσωτερικά εμπόδια

Η παρούσα εργασία αφορά την μελέτη της ροής αίματος σε αρτηριακές στενώσεις με την χρήση των μεθόδων της υπολογιστικής ρευστομηχανικής. Οι γεωμετρίες που περιβάλλουν αυτού του είδους τα προβλήματα κάθε άλλο παρά ορθογώνιες (καρτεσιανές ή κυλινδρικές) είναι. Υπάρχουν διάφορες μέθοδοι τις οποίες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για να προσεγγίσουμε όσο το δυνατόν καλύτερα το φυσικό πρόβλημα. Η προφανής επιλογή θα ήταν η χρησιμοποίηση ενός καμπυλόγραμμου συστήματος συντεταγμένων και η επίλυση των εξισώσεων της ροής με πολύπλοκους και πολύ αργούς επιλυτές όπου εμφανίζονται και όροι των παραγώγων του υπολογιστικού πλέγματος. Όσο ο αριθμός των υπολογιστικών κυττάρων αυξάνεται (πχ. για την περίπτωση της τυρβώδους ροής σε σωλήνα απαιτούνται  $10^8$  σημεία για σχετικά μικρούς αριθμούς Reynolds) ή υπάρχουν επιφάνειες που κινούνται με το χρόνο επίλυσης του προβλήματος, η χρήση τρισδιάστατου καμπυλόγραμμου κώδικα γίνεται απαγορευτική ακόμη και για τους σύγχρονους υπολογιστές. Επιπλέον καθώς αυξάνονται τα υπολογιστικά κύτταρα, η χρησιμοποίηση καμπυλόγραμμου κώδικα δεν εξασφαλίζει πάντα την ακρίβεια των υπολογισμών.

Το μεγαλύτερο κομμάτι των υπολογισμών που παρουσιάζονται στην παρούσα διπλωματική εργασία αφορά διδιάστατη στρωτή ροή σε σωλήνες με ορθογωνικά τοιχία τοποθετημένα περιφερειακά στο σωλήνα και θα μπορούσε να επιλυθεί απλά με την χρήση του κώδικα πεπερασμένων όγκων του EP&Σ (χρησιμοποιώντας porosity στην περιοχή του εσωτερικού τοιχίου). Αντί αυτού επιλέχθηκε η ανάπτυξη μιας σχετικά νέας τεχνολογίας που ονομάζεται ‘εμπλεγμένο σύνορο’ και η ενσωμάτωσή της στον κώδικα DNS του Εργαστηρίου Ρευστομηχανικής. Ο σκοπός αυτής της επιλογής είναι να κατανοηθεί και να πιστοποιηθεί μια νέα υπολογιστική μέθοδο που θα μας επιτρέψει στη συνέχεια να προσομοιώνουμε τυρβώδεις ροές σε περίπλοκους αγωγούς με κινούμενα όρια και εσωτερικά εμπόδια. Από τα κύρια πλεονεκτήματα της μεθόδου αυτής είναι ότι απαιτεί μικρότερο υπολογιστικό χρόνο, καθόλου μνήμη και διατηρεί την τάξη ακρίβειας του υπολογιστικού σχήματος

#### **4.8 Περιγραφή της μεθόδου εμπλεγμένου συνόρου (immersed boundary)**

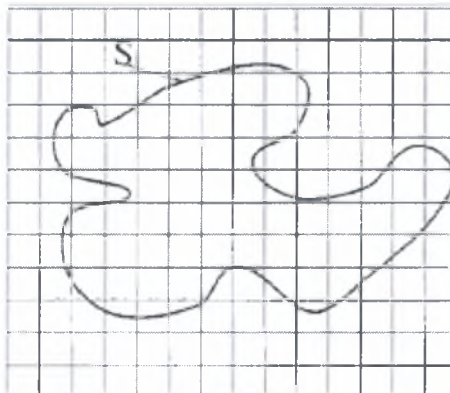
Οι αριθμητικές προσομοιώσεις επιτρέπουν την ανάλυση των φαινομένων ροής χωρίς χρήση ακριβών προτύπων και δύσκολων πειραματικών μετρήσεων. Στις περιπτώσεις απλής γεωμετρίας, η διακριτοποίηση του υπολογιστικού πεδίου γίνεται με κανονικά πλέγματα και αντιμετωπίζεται αποτελεσματικά από τους διαθέσιμους σημερινούς κώδικες. Σε αντίθεση όμως με την απλή γεωμετρία, οι σύνθετες γεωμετρίες απαιτούν καμπυλόγραμμο ή μη δομημένα πλέγματα που αποτελούν πρόκληση ακόμα και για τους σημερινούς υπολογιστές. Επιπλέον, στις περισσότερες βιομηχανικές εφαρμογές, η γεωμετρική πολυπλοκότητα συνδυάζεται με κινούμενα όρια και υψηλούς αριθμούς Reynolds που αυξάνουν αρκετά τις υπολογιστικές δυσκολίες δεδομένου ότι απαιτούν την αναγέννηση ή την παραμόρφωση του πλέγματος. Κατά συνέπεια, οι προσομοιώσεις αυτές αυξάνουν κατά πολύ τον υπολογιστικό χρόνο και ελαττώνουν την ακρίβεια εξαιτίας ενός μεγάλου αριθμού επαναλήψεων που πρέπει να εκτελείται ανά κόμβο.

Λαμβάνοντας υπόψη αυτές τις δυσκολίες είναι σαφές ότι μια εναλλακτική αριθμητική διαδικασία που μπορεί αντιμετωπίσει την πολυπλοκότητα της ροής αλλά συγχρόνως να διατηρεί την ακρίβεια και την υψηλή αποδοτικότητα από τις προσομοιώσεις που εκτελούνται στα σταθερά κανονικά πλέγματα, θα αντιπροσώπευε μια σημαντική πρόοδο στη μελέτη των πολύπλοκων ροών.

Μια δυνατότητα για τη λύση αυτού του προβλήματος είναι η εισαγωγή ενός όρου πεδίου δύναμης  $f$  (body-force field) έτσι ώστε μια επιθυμητή κατανομή της ταχύτητας  $v$  να μπορεί να οριστεί πέρα από ένα όριο  $S$ . Με άλλα λόγια, θα πρέπει να προσθέσουμε στις εξισώσεις Navier-Stokes τον όρο της δύναμης  $f$  και να λύσουμε ως προς το  $u$  την παρακάτω εξίσωση:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla(uu) = -\nabla p + \nu \cdot \nabla^2 u + f \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (4.82)$$

Σε γενικές γραμμές δεν υπάρχει κανένας περιορισμός για τη κατανομή της ταχύτητας  $v$  ούτε για τη μορφή και κίνηση του ορίου  $S$  επομένως μπορεί να επιβληθεί μια ευρεία ποικιλία των όρων ορίου. Το κύριο πλεονέκτημα αυτής της προσέγγισης είναι ότι η  $f$  μπορεί να οριστεί σε ένα κανονικό πλέγμα (Σχήμα 4.1) έτσι ώστε η ακρίβεια και η αποδοτικότητα της λύσης στα απλά πλέγματα να διατηρείται.



**Σχήμα 4.1 Εμπλεγμένο σύνορο(Immersed boundary)**

Εάν λοιπόν η διαμόρφωση του ορίου είναι γνωστή ο υπολογισμός του  $f$  γίνεται πολύ απλούστερος αφού για κάθε στοιχείο του ορίου απαιτούνται μόνο τοπικές πληροφορίες αντί της πλήρους κατανομής της δύναμης πάνω στο όριο.

#### **4.9 Μέθοδος υπολογισμού του όρου της δύναμης (Forcing method)**

Στην ενότητα αυτή θα διευκρινίσουμε την αναλυτική έκφραση της πυκνότητας της δύναμης  $f$ . Καθορίζεται λοιπόν σαν δύναμη που ενεργεί στο κελί του ορίου του οποίου η θέση την χρονική στιγμή  $t$  είναι  $x_s$ . Δεδομένου λοιπόν ότι η δύναμη εξαρτάται από την ταχύτητα του



ρευστού, η οποία γενικά μεταβάλλεται, καθώς και το όριο το ίδιο μπορεί να κινηθεί, προκύπτει το συμπέρασμα ότι και οι δύο μεταβλητές ( $f$ ,  $x_s$ ) είναι συναρτήσεις του χρόνου. Πρέπει να τονίσουμε ότι η θέση  $x_s$  γενικά δεν συμπίπτει με τη θέση των μεταβλητών της λύσης στο πλέγμα επομένως ο όρος της δύναμης πρέπει να υπολογιστεί με παρεμβολή στους κόμβους όπου εντοπίζονται άγνωστοι όροι.

$$f(x_s, t) = a_f \cdot \int_0^t [u(x_s, t') - V(x_s, t')] dt' + \beta_f \cdot [u(x_s, t') - V(x_s, t')] \quad (4.83)$$

όπου,  $a_f$  και  $\beta_f$  είναι σταθεροί αρνητικοί αριθμοί των οποίων οι διαστάσεις είναι  $1/T$  και  $1/T^2$ , αντίστοιχα,  $V(x_s, t)$  είναι η ταχύτητα του ορίου, η οποία μέσω της εξάρτησής της από το διάστημα και το χρόνο, μπορεί να μιμηθεί παραμορφώσιμα κινούμενα όρια. Η ανωτέρω ποσότητα είναι μια ανατροφοδότηση στην διαφορά ταχύτητας  $u(x_s, t) - V(x_s, t)$  και συμπεριφέρεται με τέτοιο τρόπο ώστε να επιβάλει την συνθήκη  $u = V$  στο 'εμπλεγμένου συνόρου'. Στην πραγματικότητα ο πρώτος όρος της εξίσωσης (4.83) θα μειωθεί εγκαίρως στο χρόνο, υπό την έννοια ότι γίνεται πιο αρνητικός όσο η διαφορά ταχύτητας αυξάνεται, τείνοντας έτσι να εκμηδενίσει οποιαδήποτε διαφορά μεταξύ του  $u$  και του  $V$ . Ο δεύτερος όρος, αφ' ετέρου, μπορεί να ερμηνευθεί ως αντίσταση από το στοιχείο επιφάνειας υποθέτοντας μια ταχύτητα  $u$  διαφορετική από την  $V$ . Από τα παραπάνω προκύπτει ότι εάν από την εξίσωση (4.82) διατηρήσουμε μόνο τον πρώτο όρο στην αριστερή πλευρά και τον τελευταίο όρο στην δεξιά πλευρά έχουμε: (στην περίπτωση που ισχύει  $V=0$  ή σταθερή στο χρόνο):

$$\frac{dq}{dt} \approx f \approx a_f \cdot \int_0^t q \cdot dt' + \beta_f \cdot q \quad (4.84)$$

με  $q = u - V$ . Η εξίσωση (4.84) αντιπροσωπεύει έναν απλό ταλαντωτή με τη συχνότητα  $(1/2\pi) \cdot \sqrt{|a_f|}$  και συντελεστή απόσβεσης  $-\beta_f / (2 \cdot \sqrt{|a_f|})$ . Αυτό υπονοεί ότι καθώς η  $u$  στο όριο γίνεται διαφορετική από το  $V$  η δύναμη  $f$  "φέρνει" το  $u$  πίσω στο  $V$ . Σε ένα ασταθές ρευστό το μέγεθος του  $a_f$  θα πρέπει να είναι αρκετά μεγάλο έτσι ώστε η αποκατασταθείσα δύναμη να μπορεί να αντιδράσει με μια συχνότητα που είναι μεγαλύτερη από οποιαδήποτε συχνότητα στη ροή. Δυστυχώς οι τιμές των σταθερών είναι εξαρτώμενες από τη ροή και ακόμα όταν τα  $a_f, \beta_f$  είναι αρκετά μεγάλα η ροή γίνεται ανεξάρτητη από τις τιμές τους οπότε δεν

υπάρχει ένας γενικός κανόνας για τον προσδιορισμό τους. Το σημαντικότερο μειονέκτημα αυτής της δύναμης είναι ότι οι μεγάλες τιμές των σταθερών  $a_f, \beta_f$  προσδίνουν στην εξίσωση (4.82) δυσκαμψία με αποτέλεσμα η χρονική ολοκλήρωση να απαιτεί πολύ μικρά χρονικά βήματα.

Εκτελώντας την ανάλυση σταθερότητας με το σχήμα Adams–Bashforth βρέθηκε ότι, όταν όλοι οι όροι υπολογίζονται ρητά, το όριο σταθερότητας δίνεται από τη σχέση:

$$\Delta t < \left( -\beta_f - \sqrt{(\beta_f^2 - 2 \cdot \alpha \cdot k)} \right) / a_f \quad (4.85)$$

όπου  $k$  είναι μια εξαρτώμενη σταθερά πρώτης τάξης.

Ο κύριος στόχος όμως της παρούσας μεθόδου είναι να αναπτυχθεί μια μέθοδος για την προσομοίωση τρισδιάστατης ροής σε σύνθετες γεωμετρίες με αποτέλεσμα η παραπάνω τεχνική να είναι πολύ περιοριστική και ταυτόχρονα πολύ ακριβή για την προσομοίωση αυτή. Μια μερική βελτίωση στο όριο σταθερότητας λαμβάνεται όταν ο δεύτερος όρος στο δεξί μέρος της εξίσωσης (4.84) υπολογίζεται ρητά στον χρόνο όπως παρακάτω:

$$f^{l+1/2} = a_f \cdot \left[ \gamma_l \cdot \int_0^{t^l} q \cdot dt + \rho_l \cdot \int_0^{t^{l+1}} q \cdot dt \right] + \beta_f \cdot \left[ a_l \cdot \frac{q^{l+1} - q^l}{2} \right] \quad (4.86)$$

όπου  $l$  είναι το διακριτοποιημένο χρονικό βήμα και  $\gamma_l, \rho_l$  και  $a_l$  οι συντελεστές του χρονικού σχήματος.

#### 4.10 Απευθείας δύναμη (Direct forcing)

Μια εναλλακτική έκφραση για τη δύναμη  $f$ , η οποία όταν είναι κατάλληλα υπολογισμένη, δεν πάσχει από τους αναφερθέντες περιορισμούς υπολογίζεται όπως φαίνεται παρακάτω:

α) Διακριτοποιούμε την εξίσωση (4.82) στον χρόνο και έχουμε:

$$\frac{u^{l+1} - u^l}{\Delta t} = RHS^{l+1/2} + f^{l+1/2} \quad (4.87)$$

όπου ο όρος  $RHS^{l+1/2}$  περιέχει τους όρους συναγωγής, ιξώδους καθώς και αυτόν της κλίσης πίεσης.

β) Λύνουμε την εξίσωση (4.87) ως προς  $f^{l+1/2}$  και αντικαθιστούμε όπου  $u^{l+1} = V^{l+1}$  στο ‘εμπλεγμένο σύνορο’ οπότε προκύπτει η παρακάτω εξίσωση:

$$f^{l+1/2} = -RHS^{l+1/2} + \frac{V^{l+1} - u^l}{\Delta t} \quad (4.88)$$

Αυτή η δύναμη είναι άμεση υπό την έννοια ότι η επιθυμητή τιμή της ταχύτητας επιβάλλεται άμεσα στο όριο χωρίς οποιαδήποτε δυναμική διαδικασία. Επομένως σε κάθε χρονικό βήμα οι οριακές συνθήκες κρατούν ανεξάρτητες τις συχνότητες στη ροή. Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ότι δε υπάρχουν ελεύθερες σταθερές να επιλεγούν και οι οριακές συνθήκες επιβάλλονται ακριβώς. Επιπλέον ο όρος της δύναμης στην εξίσωση (4.88) δεν απαιτεί πρόσθετο υπολογιστικό χρόνο δεδομένου ότι δεν περιλαμβάνει υπολογισμούς πρόσθετων όρων. Αλλά ακόμα και όταν κάθε όρος υπολογίζεται την κατάλληλη χρονική στιγμή δεν επηρεάζει τη σταθερότητα του σχήματος χρονικής ολοκλήρωσης.

#### 4.11 Μέθοδοι παρεμβολών

Όπως ήδη έχουμε αναφέρει η έκφραση για τον όρο της δύναμης θα ήταν γνωστή εάν η θέση των αγνώστων στο πλέγμα συνέπιπτε με αυτή του ‘εμπλεγμένο σύνορο’. Αυτό γενικά δεν ισχύει επειδή θα απαιτούσε το όριο να βρίσκεται πάνω στις γραμμές συντεταγμένων ή στις επιφάνειες, πράγμα το οποίο δεν είναι περίπτωση για σύνθετη καμπυλόγραμμη γεωμετρία. Ειδικότερα, στην παρούσα περίπτωση, όπου χρησιμοποιείται ένα μετατοπισμένο (staggered) πλέγμα, ακόμα κι αν το όριο συνέπιπτε με τη θέση ενός στοιχείου της ταχύτητας που ήταν καθορισμένο, αυτό δεν θα ίσχυε για τα άλλα στοιχεία. Επομένως, μια διαδικασία παρεμβολής θα απαιτούταν οπωσδήποτε. Προκειμένου να εξεταστεί η σημασία της παρεμβολής θα εφαρμόσουμε τρεις διαφορετικές μεθόδους ώστε να υπολογίσει η επίδραση της στην ακρίβεια του σχήματος:

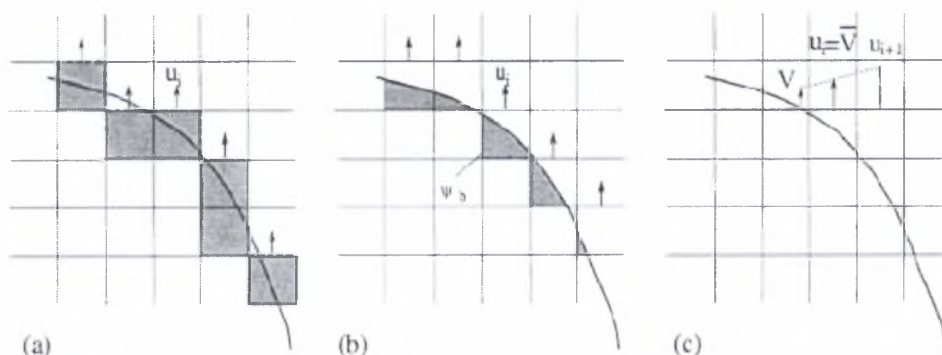
Η πρώτη και απλούστερη μέθοδος είναι να επιλεχτούν τα σημεία του πλέγματος τα οποία είναι πιο κοντά στο ‘εμπλεγμένο σύνορο’ και στη συνέχεια να προστεθεί ο όρος της δύναμης στις θέσεις των αγνώστων υποθέτοντας ότι αυτές συνέπιπταν με αυτές του ορίου. Στην περίπτωση αυτή ουσιαστικά δεν γίνεται καμία παρεμβολή και η γεωμετρία περιγράφεται με έναν σταδιακό τρόπο. Αξίζει να σημειωθεί ότι η επιφάνεια είναι κάπως διασκορπισμένη αφού οι οριακές συνθήκες για τις τρεις ταχύτητες εφαρμόζονται σε διαφορετικές θέσεις. (Σχήμα 4α)

Η δεύτερη μέθοδος στηρίζεται στον υπολογισμό κάθε κελιού που διασταυρώνεται με το όριο υπολογίζοντας μέρος όγκου που καταλαμβάνεται από το σώμα  $\psi_b$  σε σχέση με τον όγκο του κελιού  $\psi$ . Ο συντελεστής βαρύτητας  $\psi_b / \psi$  χρησιμοποιείται για να ‘εξισορροπήσει’ τον όρο της δύναμης που εφαρμόζεται στους αγνώστους πλησιέστερα στο όριο. Παραδείγματος

χάριν όπως φαίνεται στο Σχήμα 4b για την μεταβλητή της ταχύτητας  $u$ , ο όρος της δύναμης θα

$$\text{είναι } f_i \cdot \frac{\psi_b}{\psi}$$

Στην τρίτη περίπτωση όμως σε αντίθεση με την δεύτερη, υπολογίζουμε την τιμή της ταχύτητας, με γραμμική παρεμβολή, στο σημείο που είναι κοντινότερο στο όριο αν θεωρητικά το όριο είχε ταχύτητα  $V$ , Σχήμα 4c



(a) καμία παρεμβολή  $\Rightarrow$  σταδιακή γεωμετρία (no interpolation  $\Rightarrow$  stepwise geometry)

(b) ταχύτητα μέρους όγκου (volume fraction velocity) (c) παρεμβολή ταχύτητας (velocity interpolation)

**Σχήμα 4.2 Γραφικές απεικονίσεις των μεθόδων παρεμβολής:**

#### 4.12 Μερικές υπολογιστικές λεπτομέρειες

Στην ενότητα αυτή περιγράφουμε ειδικότερα πώς η ολοκλήρωση της εξίσωσης (4.82) αλλάζει από την παρουσία της δύναμης  $f$ . Η διαδικασία ολοκλήρωσης αποτελείται από μια βηματική μέθοδο σε συνδυασμό με ένα υβριδικό ρητό σχήμα τρίτης τάξης Runge-Kutta για τους όρους συναγωγής και ένα άρρητο Crank-Nicolson σχήμα για τους ιξώδεις όρους. Το πλεονέκτημα του τρίτης τάξεως σχήματος Runge – Kutta σε σχέση με άλλα σχήματα χρονικής ολοκλήρωσης είναι η βελτιωμένη ευστάθεια η οποία με τη βοήθεια των ιξωδών όρων πετυχαίνει  $CLF \approx 2$  (Courant number)

Παρόλο που σε κάθε χρονικό βήμα του σχήματος που χρησιμοποιείται γίνονται τρία υποβήματα που απαιτούν τρεις φορές περισσότερους υπολογισμούς από τα κοινά σχήματα δευτέρας τάξεως, εντούτοις το σχήμα τρίτης τάξεως Runge–Kutta είναι ακόμα συμφέρον

δεδομένου ότι δεν απαιτεί πρόσθετο αποθηκευτικό χώρο και με το ίδιο υπολογιστικό κόστος όπως τα άλλα σχήματα δευτέρας τάξης παράγει λάθη που είναι γενικά μικρότερα. Σχετικά με την παραπάνω επεξεργασία των ιξωδών όρων, αυτό γίνεται προκειμένου να αποφευχθεί η περιοριστική συνθήκη σταθερότητας του όρου αυτού που δίνεται από την παρακάτω σχέση:

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x^2 \cdot \text{Re}}{2 \cdot n} \quad (4.89)$$

όπου  $n$  είναι ο αριθμός των χωρικών διαστάσεων.

Πρέπει επίσης να αναφερθεί ότι στις ροές με υψηλό αριθμό Reynolds η συνθήκη γίνεται λιγότερο περιοριστική. Εντούτοις όταν ο αριθμός Reynolds αυξάνει θα πρέπει τα διαστήματα στο πλέγμα να μειωθούν ώστε ο όρος σταθερότητας να είναι πάντα πιο περιοριστικός από τον όρο CFL. Οι ιξώδεις τάσεις είναι πολύ περιοριστικές και εάν δεν ήταν υπολογισμένες άρρητα το χρονικό βήμα ολοκλήρωσης θα ήταν περίπου δέκα φορές μικρότερο από το όριο που δίνεται από την συνθήκη CFL.

Αναπτύσσοντας την εξίσωση (4.82) στο χρόνο χρησιμοποιώντας την πίεση στο προηγούμενο χρονικό βήμα και θεωρώντας μη-σωληνοειδές πεδίο ταχυτήτων η ταχύτητα  $\hat{u}$  δίνεται από την παρακάτω εξίσωση :

$$\frac{\hat{u} - u^l}{\Delta t} = -a_1 \cdot \nabla p^l - [\gamma_l \cdot \nabla(u \cdot u)^l + \rho_l \cdot \nabla(u \cdot u)^{l-1}] + \frac{a_1}{2 \cdot \text{Re}} \cdot \nabla(\hat{u} + u^l) + f^{l+\frac{1}{2}} \quad (4.90)$$

Στην συνέχεια το  $u$  προβάλλεται πάνω σε έναν σωληνοειδή τομέα οπότε προκύπτει:

$$u^{l+1} = \hat{u} - a_1 \cdot \Delta t \cdot \nabla \phi^{l+1} \quad (4.91)$$

Το  $\phi^{l+1}$  υπολογίζεται από την απόκλιση της παραπάνω εξίσωσης και είναι:

$$\nabla^2 \phi^{l+1} = -\frac{\nabla \cdot \hat{u}}{a_1 \cdot \Delta t} \quad (4.92)$$

Όταν υπολογισθεί ο όρος  $\phi^{l+1}$  το πεδίο ταχυτήτων ανανεώνεται χρησιμοποιώντας την εξίσωση (4.91) με αποτέλεσμα το πεδίο πιέσεων να δίνεται από την εξίσωση:

$$p^{l+1} = p^l + \phi^{l+1} - \frac{a_1 \cdot \Delta t}{2 \cdot \text{Re}} \cdot \nabla^2 \phi^{l+1} \quad (4.93)$$



Το πρώτο σημείο που πρέπει να τονισθεί όταν συγκριθεί η εξίσωση (4.90) με την (4.87) (με το  $\hat{u}$  αντί για το  $u^{l+1}$ ) είναι ότι εξ 'αιτίας της επεξεργασίας των ιξωδών όρων ο όρος  $RSH^{\frac{l+1}{2}}$  είναι στην πραγματικότητα μια συνάρτηση του  $\hat{u}$ . Οπότε ο υπολογισμός του  $f^{l+\frac{1}{2}}$  μέσω της εξίσωσης (4.88) δεν είναι ρητός αλλά απαιτεί την αντιστροφή ενός διακριτοποιημένου συστήματος εξισώσεων που συνδέεται με αυτό της διακριτοποιημένης εξίσωσης της ορμής. Στην πράξη η αντιστροφή αυτού του σύνθετου συστήματος δεν εκτελείται επειδή οι εξισώσεις (4.90) και (4.88) δεν μπορούν να ανασχηματιστούν εύκολα όπως θα γινόταν αν είχαμε μόνο την αντιστροφή της εξίσωσης (4.90). Επειδή είναι ευκολότερη σε μια διάσταση, θα παρουσιάσουμε τη διαδικασία μόνο για τις μονοδιάστατες εξισώσεις. Η εξίσωση (4.90) ισχύει και για το ρευστό και για το 'εμπλεγμένο σύνδρο' με αποτέλεσμα:  $f^{l+\frac{1}{2}} \equiv 0$ . Ανάλογα θέτοντας  $\delta u = \hat{u} - u^l$  στην εξίσωση (4.90) προκύπτει:

$$\left(1 - \frac{a_l \cdot \Delta t}{2 \cdot \text{Re}} \cdot \frac{d}{dx^2}\right) \cdot \delta u = RHS^{l+\frac{1}{2}} \quad (4.94)$$

ή όταν το  $d/dx^2$  διακριτοποιείται στο χώρο από μια προσέγγιση τριών σημείων προκύπτει:

$$a_l \cdot \delta u_{l-1} + (1 + b_l) \cdot \delta u_l + c_l \cdot \delta u_{l+1} = RHS_l^{l+\frac{1}{2}} \quad (4.95)$$

όπου τα  $a_l$ ,  $b_l$  και  $c_l$  εξαρτώνται από την ιδιαίτερη προσέγγιση που χρησιμοποιείται για τη χωρική παράγωγο. Επομένως τώρα το  $RHS_l^{l+\frac{1}{2}}$  περιέχει μόνο τις ποσότητες που είναι γνωστές από το προηγούμενο βήμα με αποτέλεσμα ο υπολογισμός του να είναι απλός.

Στην εξίσωση (4.90) πάνω 'εμπλεγμένο σύνδρο' ο υπολογισμός του όρου της δύναμης είναι απαραίτητο να υπολογισθεί. Εντούτοις, ακόμα κι αν δεν ξέρουμε την τιμή του  $f^{l+\frac{1}{2}}$ , ξέρουμε ότι στο πρώτο σημείο του πλέγματος εκτός ορίου θα πρέπει να ισχύει:  $\hat{u}_l = \hat{V}_l$ . Αλλά το  $\hat{V}_l$  είναι μια γραμμική παρεμβολή μεταξύ του  $\hat{V}_l$  και του  $\hat{u}_{ie}$  με  $ie = i + 1$  ή  $ie = i - 1$  ανάλογα με την κατεύθυνση. (παραδείγματος χάριν, για την περίπτωση του σχεδίου 2c έχουμε:  $ie = i + 1$ ). Αυτό υπονοεί ότι η  $\hat{u}_l$  μπορεί να γραφτεί ως  $\hat{u}_l = d_l \cdot \hat{V}_l - e_l \cdot \hat{u}_{ie}$ , όπου  $d_l$  και  $-$



$e_i$ , οι συντελεστές της γραμμικής παρεμβολής. Με την προσθήκη και την αφαίρεση κατάλληλων όρων η προηγούμενη σχέση μπορεί να ξαναγραφεί ως :

$$\delta u_i + e \cdot \delta u_{ie} = d_i \cdot V_i - u_i' - e_i \cdot u_{ie}' = RHS_i^{\frac{1}{2}} \quad (4.96)$$

Η ανωτέρω εξίσωση έχει μια δομή παρόμοια με αυτή της εξίσωσης (4.95) και επομένως μπορούν να λυθούν μαζί χωρίς αλλαγή της διαδικασίας λύσης και χωρίς την απαίτηση του ρητού υπολογισμού του όρου της δύναμης. Ένα άλλο σημείο που πρέπει να διευκρινιστεί είναι η επιβολή του όρου της δύναμης στην εξίσωση για το  $\hat{u}$  αντί για το  $u^{i+1}$ . Αν και αυτό το πρόβλημα δεν αναφέρεται άμεσα στο ‘εμπλεγμένο σύνορο’ αλλά μάλλον στο συνδυασμό της τεχνικής με την βηματική μέθοδο, πρέπει να σημειώσουμε ότι εάν το διορθωτικό βήμα της εξίσωσης (4.91) αλλάζει τις ταχύτητες πάνω στο ‘εμπλεγμένο σύνορο’ τότε η επεξεργασία της λύσης για το σώμα θα είναι ανακριβής. Πράγματι για την κάθε αριθμητική προσομοίωση έχουμε ελέγξει τα λάθη στο ‘εμπλεγμένο σύνορο’ και έχουμε δει ότι η τροποποίηση που παρέχεται από το διορθωτικό βήμα της εξίσωσης (4.91) είναι πάντα αμελητέο ( $O(10^{-3} - 10^{-4})$ ) όταν συγκρίνεται με τις τιμές των ίδιων των ταχυτήτων.

Μια πιθανή εξήγηση για αυτήν την συμπεριφορά είναι η ακόλουθη: Οι συνοριακές συνθήκες των ταχυτήτων σ’ ένα πλαίσιο που κινείται σε μία επιφάνεια θα πρέπει να είναι:  $u_\tau = u_n \equiv 0$  με  $\tau, n$  να είναι οι εφαπτομενικές και κανονικές κατευθύνσεις, αντίστοιχα. Εάν λοιπόν συμβεί να ισχύει:  $u_\tau = u_n \equiv 0$  τότε ο όρος της δύναμης θα απαλειφθεί δεδομένου ότι δεν υπάρχει τίποτα να την ενδυναμώσει, με αποτέλεσμα η εξίσωση της ορμής στον τοίχο να γράφεται ως εξής:

$$\frac{\partial u_n}{\partial t} + u_n \cdot \frac{\partial u_n}{\partial n} + u_\tau \cdot \frac{\partial u_n}{\partial \tau} = -\frac{\partial P}{\partial n} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u_n}{\partial n^2} + \frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2} \quad (4.97)$$

Εξαιτίας των οριακών συνθηκών, όλοι οι όροι εξαφανίζονται εκτός από τον πρώτο και τον τελευταίο στην αριστερή πλευρά. Εντούτοις, εάν οι ταχύτητες γραμμικοποιηθούν στο ‘βυθισμένο’ όριο ο όρος  $\frac{1}{Re} \cdot \frac{\partial^2 u_n}{\partial \tau^2}$  επίσης εξαφανίζεται και η ανωτέρω εξίσωση καταλήγει στην:  $\frac{\partial P}{\partial n} = 0$ . Τα επιχειρήματα θα μπορούσαν να επαναληφθούν για το εφαπτομενική ταχύτητα

$u_r$  που δείχνει ότι κατά μήκος του ορίου πρέπει να καταλήγει στην σχέση  $\frac{\partial P}{\partial \tau} = 0$ . Πρέπει να σημειώσουμε ότι αυτό συμβαίνει μόνο στο όριο ενώ μέσα και έξω από το σώμα η πίεση συμπεριφέρεται σύμφωνα με την δυναμική της ροής.

Αυτό εξηγεί γιατί ακόμα κι αν τίποτα δεν επιβάλλεται ρητά στην πίεση, συμπεριφέρεται σωστά πάνω στα τοιχώματα.

#### 4.13 Πιστοποίηση του παρόντος κώδικα

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων του υπολογιστικού μοντέλου που χρησιμοποιήθηκε με την δημοσιευμένη εργασία των Pinho et al (2003) παρουσιάζεται στον παρακάτω πίνακα:

Re	20	40	60	80	100	120
x/D(Pinho et al)	1.0036	1.92112	2.81	3.7849	4.6165	5.4480
x/D(κώδικας)	1.0013	1.9144	2.8090	3.7788	4.6181	5.4429

## 5 ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΣΥΖΗΤΗΣΗ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα αποτελέσματα των προσομοιώσεων των δύο βασικών περιπτώσεων που μελετήθηκαν: α) της ροής του αίματος σε περιοδικές στενώσεις, και β) των τροχιών των σωματιδίων (αιμοσφαιρίων και αιμοπεταλίων) που το αποτελούν μέσα σε αυτές.

### 5.1 Στοιχεία παραμετρικής μελέτης για την ροή χωρίς σωματίδια

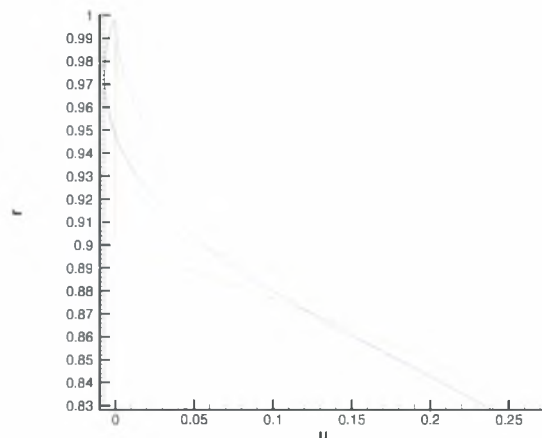
Για να εξετάσουμε όσο το δυνατόν σφαιρικά και διεξοδικά το αντικείμενο που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία θεωρούμε σκόπιμο να μεταβάλλουμε κάθε φορά μια από τις εξής παραμέτρους: Το ύψος του εμποδίου ( $h$ ), το μήκος του εμποδίου ( $l$ ), τον αριθμό Reynolds ( $Re$ ), την περίοδο με την οποία επαναλαμβάνεται το εμπόδιο ( $L$ )

Πίνακας 5.1 Στοιχεία της παραμετρικής μελέτης

Περίπτωση	$h$	$L$	$Re$	$L$
1	0.1	0.1	300	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
2	0.1	0.1	200	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
3	0.1	0.1	100	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
4	0.1	0.1	50	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
5	0.2	0.1	300	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4$
6	0.2	0.1	200	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4$
7	0.2	0.1	100	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
8	0.2	0.1	50	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
9	0.3	0.1	300	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4$
10	0.3	0.1	200	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4$
11	0.3	0.1	100	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4$
12	0.3	0.1	50	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
13	0.1	0.3	300	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
14	0.1	0.3	200	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
15	0.1	0.3	100	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$
16	0.1	0.3	50	$3\pi/4, \pi/2, \pi/4, \pi/8$

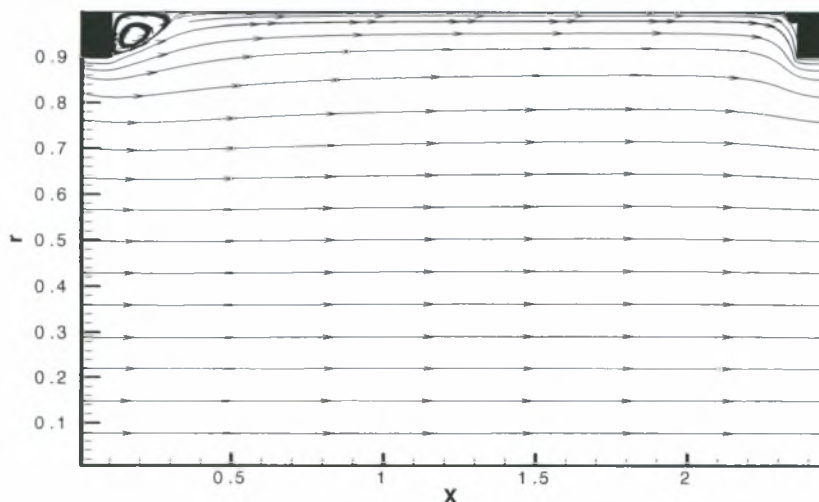
### 5.1.1 Αποτελέσματα Περίπτωσης ( $h=0.1, l=0.1, Re=300$ )

Τα αποτελέσματα της περίπτωσης 1a υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.1 έως 6.3

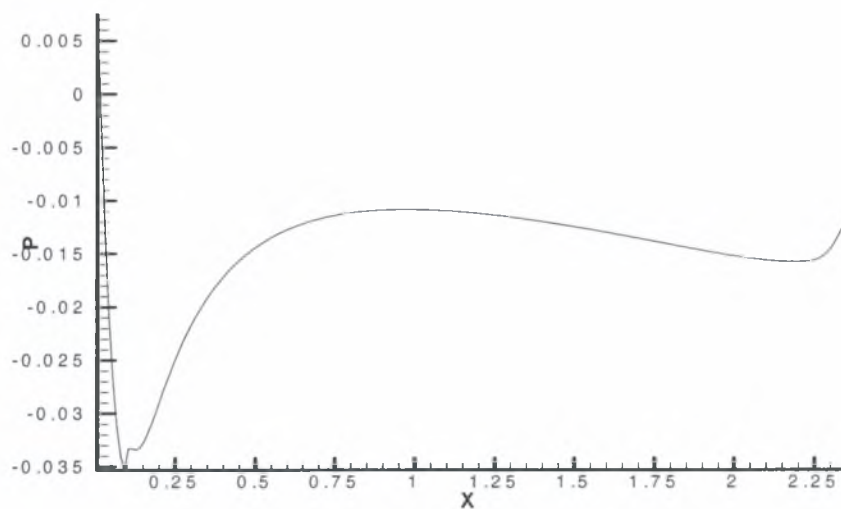


(Κόκκινη:  $x=0.1043$ , Μαύρη:  $x=0.1902$ , Μπλε:  $x=0.3252$ , Πράσινη:  $x=2.337$ )

**Σχήμα 6.1 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=3\pi/4$ )**

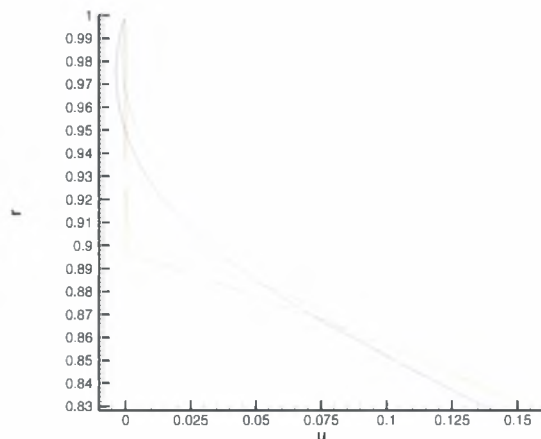


**Σχήμα 6.2 Γραμμές ροής ( $L=3\pi/4$ )**



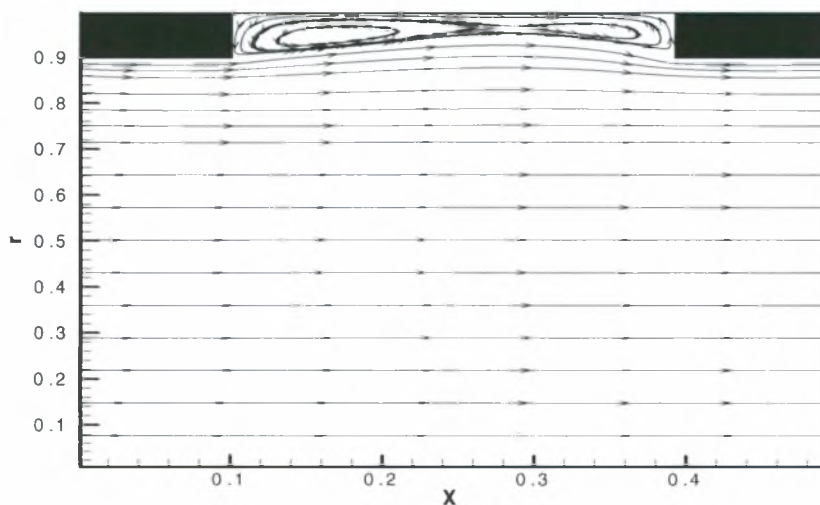
**Σχήμα 6.3 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=3\pi/4$ )**

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 1d υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.4 έως 6.6



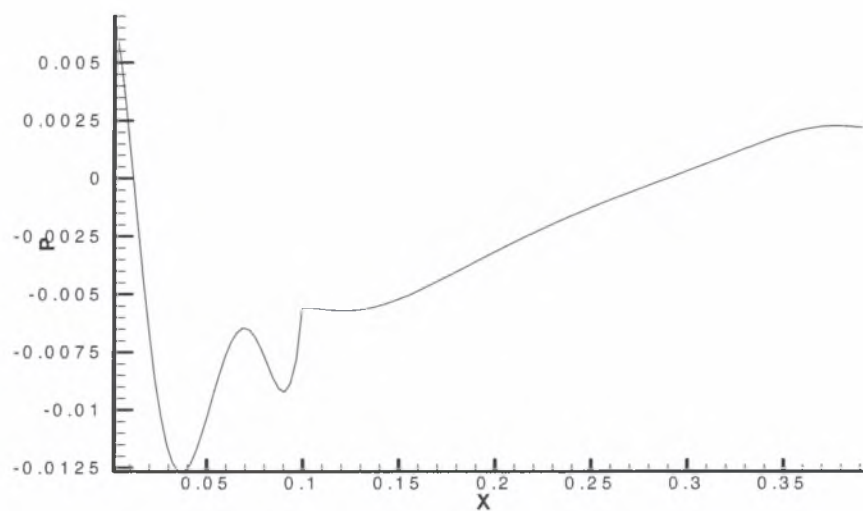
(Κόκκινη:  $x=0.05062$ , Μαύρη:  $x=0.1825$ , Μπλε:  $x=0.2745$ , Πράσινη:  $x=0.3880$ )

**Σχήμα 6.4 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=\pi/8$ )**



**Σχήμα 6.5 Γραμμές ροής ( $L=\pi/8$ )**





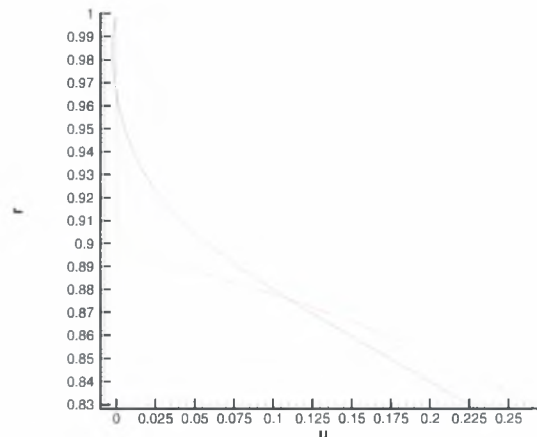
**Σχήμα 6.6 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=\pi/8$ )**

Εξετάζοντας τα Σχήματα 6.4 έως 6.6 παρατηρούμε τα ακόλουθα:

- i. Καθώς η περίοδος  $L$  ελαττώνεται η ταχύτητα της ροής μειώνεται. Αυτό συμβαίνει γιατί αυξάνονται οι απώλειες λόγω ισχυρότερων ανακυκλοφοριών.
- ii. Για αριθμό  $Re=300$  και για περίοδο  $L=3\pi/4$  παρουσιάζονται δύο ανακυκλοφορίες, μια μπροστά από το πρώτο εμπόδιο με μήκος επανακόλλησης:  $x_a = 0.225204$  και μια πίσω από το δεύτερο με μήκος επανακόλλησης:  $x_b = 0.02455$ . Επομένως το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας είναι πολύ μεγαλύτερο από της δεύτερης (μια τάξη μεγέθους μεγαλύτερο).
- iii. Όταν μειώσουμε την απόσταση μεταξύ των εμποδίων ( $L=\pi/2$ ) παρατηρούμε ότι το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ελαττώνεται λίγο ( $x_a = 0.214977$ ) και αυξάνεται αυτό της δεύτερης ( $x_b = 0.03273$ ).
- iv. Το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας μειώνεται ενώ της δεύτερης αυξάνεται μέχρις ότου η περίοδος  $L$  φτάσει να είναι  $\pi/8$  όπου από εκείνο το σημείο και μετά οι δύο ανακυκλοφορίες ενώνονται και γίνονται μια.

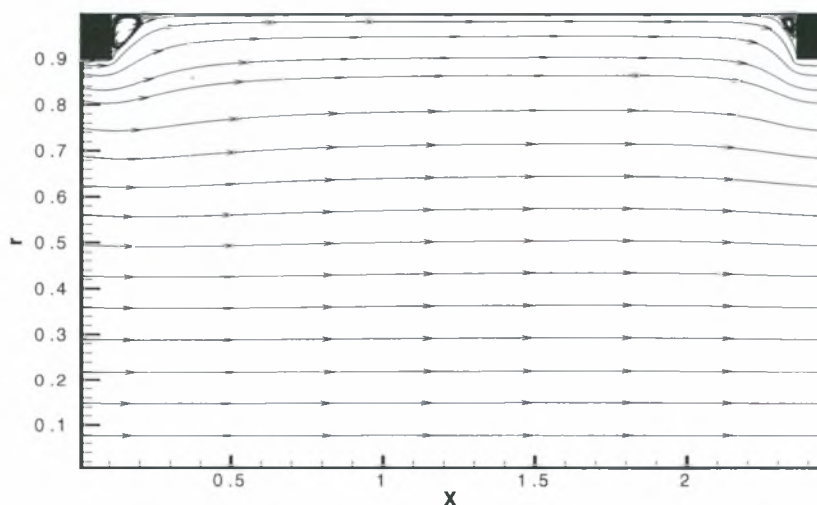
### 5.1.2 Αποτελέσματα Περίπτωσης ( $h=0.1$ , $l=0.1$ , $Re=50$ )

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 4a υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.7 έως 6.9

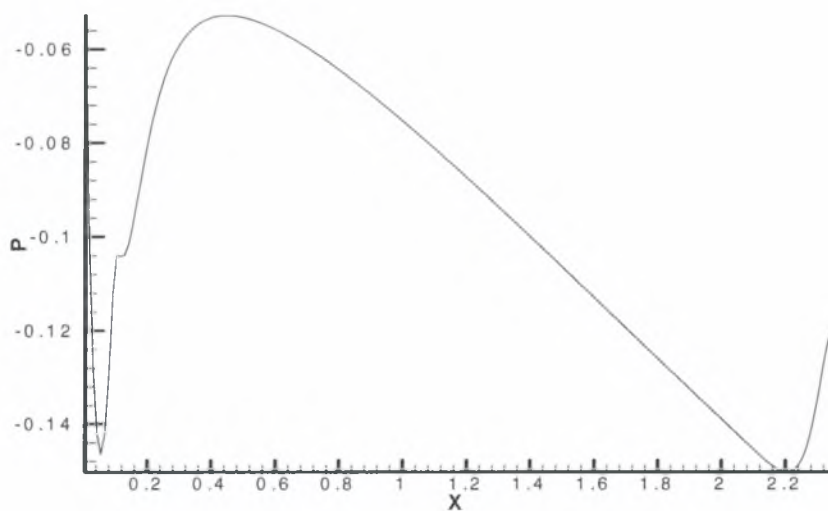


(Κόκκινη:  $x=0.0184$ , Μαύρη:  $x=0.1656$ , Μπλε:  $x=0.2745$ , Πράσινη:  $x=0.7915$ , Θαλασσί:  $x=2.3255$ )

**Σχήμα 6.7 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=3\pi/4$ )**

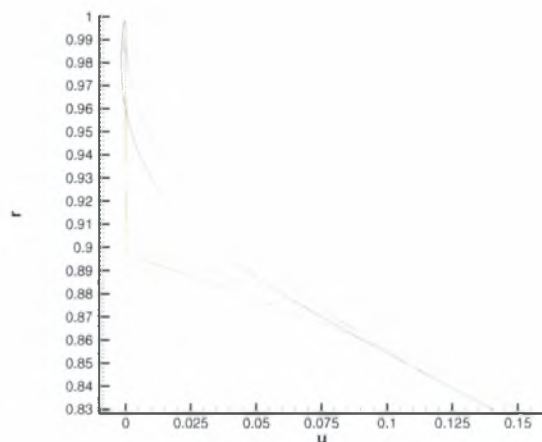


**Σχήμα 6.8 Γραμμές ροής ( $L=3\pi/4$ )**



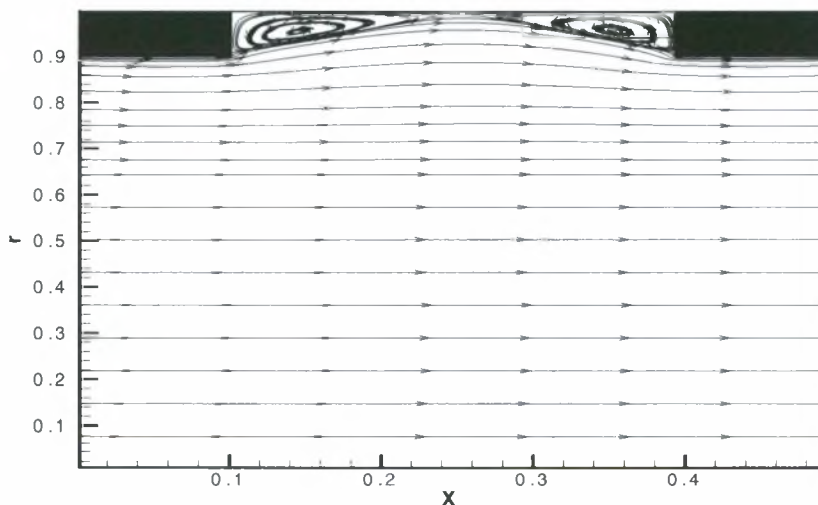
**Σχήμα 6.9 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=3\pi/4$ )**

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 4d υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.10 έως 6.12

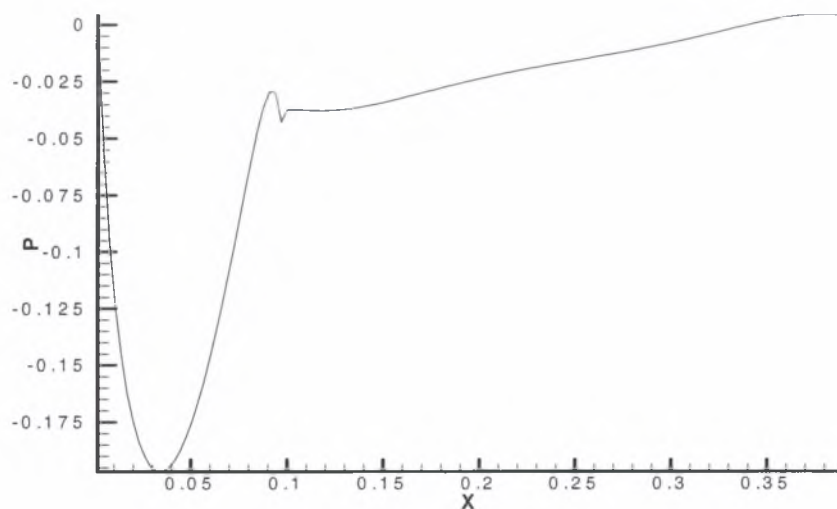


(Κόκκινη:  $x=0.0506$ , Μαύρη:  $x=0.1825$ , Μπλε:  $x=0.2745$ , Πράσινη:  $x=0.3880$ )

**Σχήμα 6.10 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=\pi/8$ )**



**Σχήμα 6.11 Γραμμές ροής ( $L=\pi/8$ )**



**Σχήμα 6.12 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=\pi/8$ )**



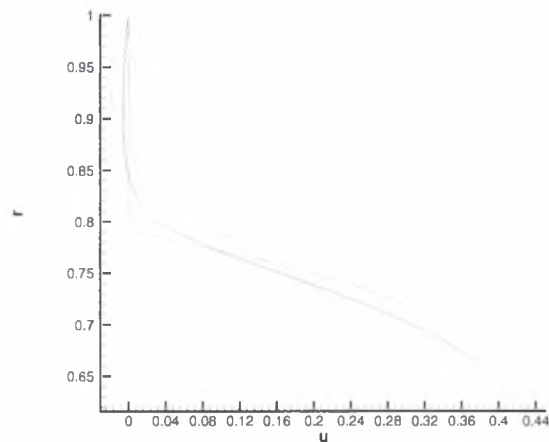
Στις δύο παραπάνω περιπτώσεις παρατηρούμε την επίδραση που έχει ο αριθμός Reynolds στις ροϊκές γραμμές και εξάγουμε τα εξής συμπεράσματα:

- i. Με σταθερές τις διαστάσεις του εμποδίου όσο μειώνεται ο αριθμός Reynolds το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ελαττώνεται αλλά με γρηγορότερο ρυθμό συγκρινόμενο με την μεταβολή όταν μειώνουμε την περίοδο. Για παράδειγμα για  $L=3\pi/4$ , όταν ο αριθμός  $Re=50$ , το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας γίνεται  $x_a = 0.114757$  από  $x_a = 0.225204$  που ήταν για  $Re=300$
- ii. Το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας από την άλλη αυξάνεται με πολύ μικρούς ρυθμούς. Από  $x_b = 0.02455$  που ήταν για  $Re=300$  γίνεται  $x_b = 0.04909$  όταν ο αριθμός  $Re$  παίρνει την τιμή 50.

•

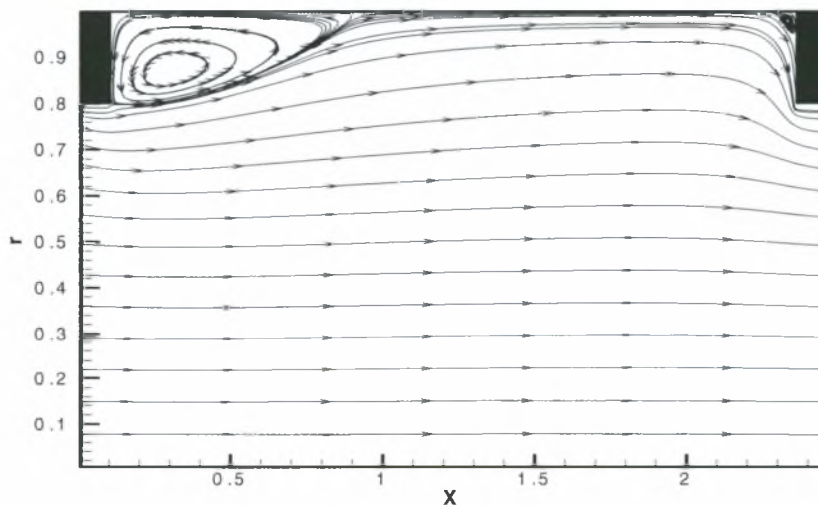
### 5.1.3 Αποτελέσματα Περίπτωσης ( $h=0.2$ , $l=0.1$ , $Re=300$ )

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 5a υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.13 έως 6.15

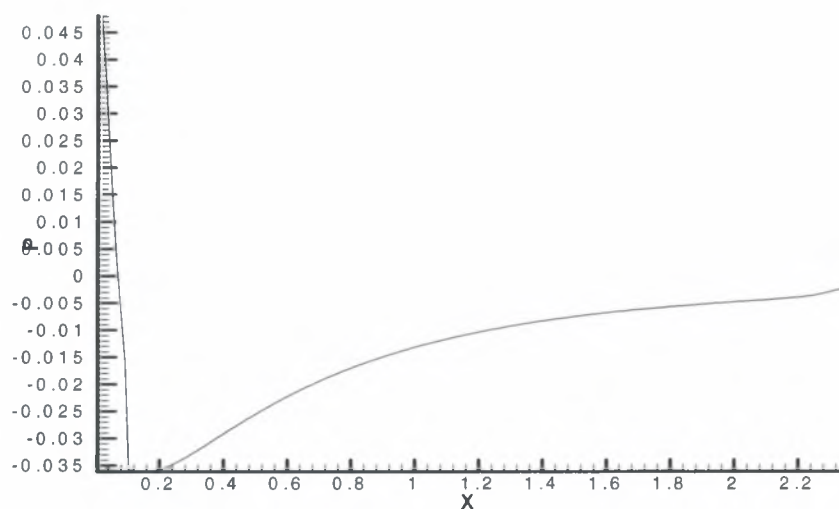


(Κόκκινη:  $x=0.0552$ , Μαύρη:  $x=0.1533$ , Μπλε:  $x=0.3497$ , Γράσινη:  $x=0.9142$ , Θαλασσί:  $x=2.3377$ )

**Σχήμα 6.13 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=3\pi/4$ )**

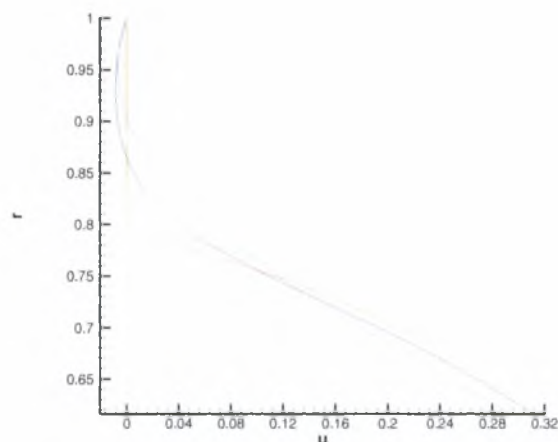


**Σχήμα 6.14 Γραμμές ροής ( $L=3\pi/4$ )**



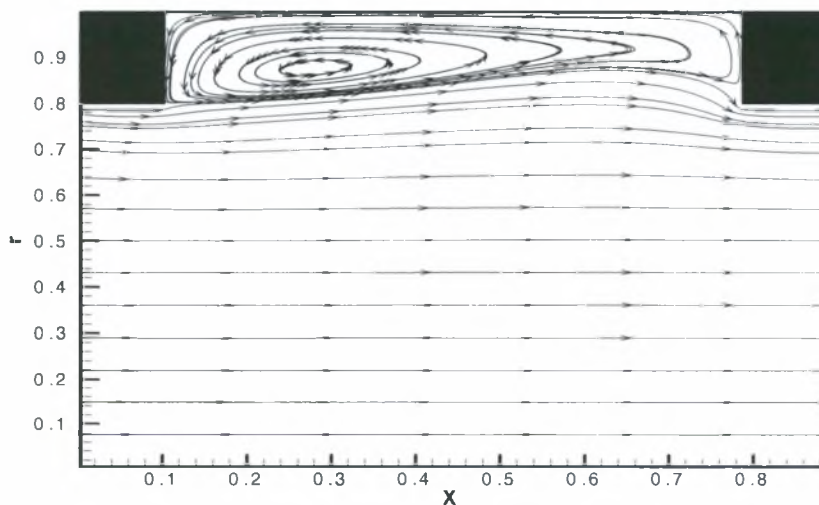
**Σχήμα 6.15 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=3\pi/4$ )**

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 5c υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.16 έως 6.18

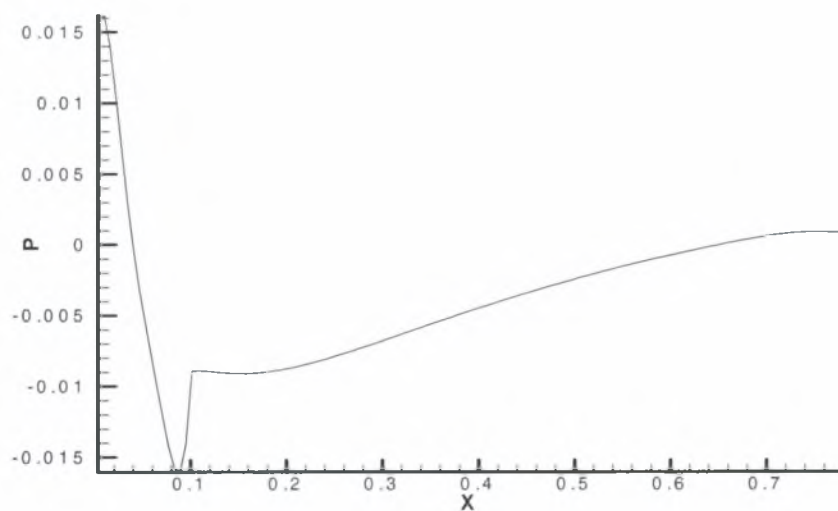


(Κόκκινη:  $x=0.0951$ , Μαύρη:  $x=0.2055$ , Μπλε:  $x=0.4878$ , Πράσινη:  $x=0.77$ )

**Σχήμα 6.16 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=\pi/4$ )**



**Σχήμα 6.17 Γραμμές ροής ( $L=\pi/4$ )**



**Σχήμα 6.18 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=\pi/4$ )**

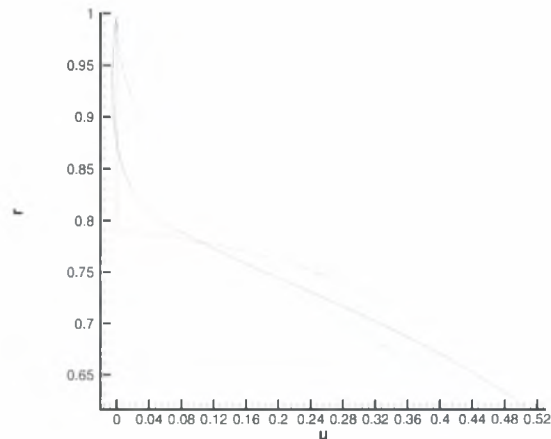
Μέχρι τώρα εξετάσαμε την επίδραση της περιόδου και του αριθμού  $Re$  για ένα συγκεκριμένο τύπο εμποδίου. Διπλασιάζοντας το ύψος του εμποδίου και κρατώντας σταθερό το μήκος του εξάγουμε τα παρακάτω συμπεράσματα:

- i. Το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας αυξάνεται κατά πολύ σε σχέση με αυτό της περίπτωσης όπου το εμπόδιο είχε ύψος  $h=0.1$  ( $x_a = 0.225204$ ). Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι το μήκος της (πρώτης περιδίνησης) είναι  $x_a = 0.838796$  για  $Re=300$  και περίοδο  $L=3\pi/4$ , δηλαδή η τιμή του σχεδόν τετραπλασιάστηκε. Το ίδιο συμβαίνει και με το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας μόνο που το φαινόμενο δεν είναι τόσο αμβλύ, δηλαδή από  $x_b = 0.02455$  γίνεται  $x_b = 0.04909$  (διπλασιάστηκε).
- ii. Μειώνοντας την περίοδο  $L$  παρατηρούμε και πάλι ότι το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ελαττώνεται, αλλά με μεγαλύτερο ρυθμό. Για τον ίδιο  $Re$  αλλά με περίοδο  $L=\pi/2$ , το μήκος παίρνει την τιμή:  $x_a = 0.779482$ . Το αντίθετο συμβαίνει με το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης που παίρνει την τιμή  $x_b = 0.08182$



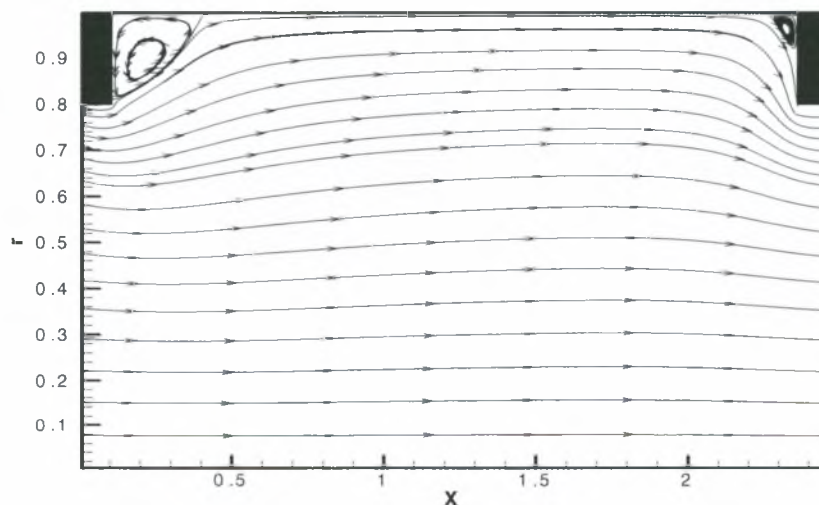
#### 5.1.4 Περίπτωση $h=0.2$ , $l=0.1$ , $Re=50$

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 8α υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.19 έως 6.21

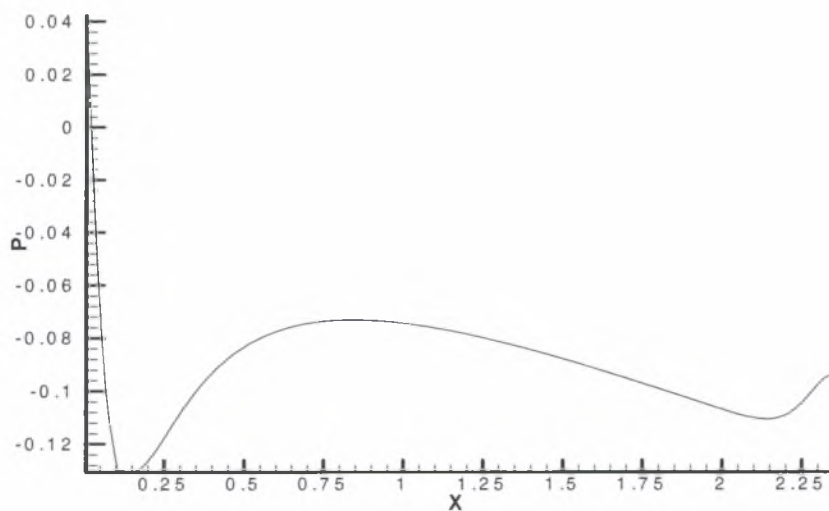


(Κόκκινη:  $x=0.0061$ , Μαύρη:  $x=0.1656$ , Μπλε:  $x=0.3988$ , Πράσινη:  $x=0.9756$ , Θαλασσί:  $x=2.3009$ )

**Σχήμα 6.19 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=3\pi/4$ )**

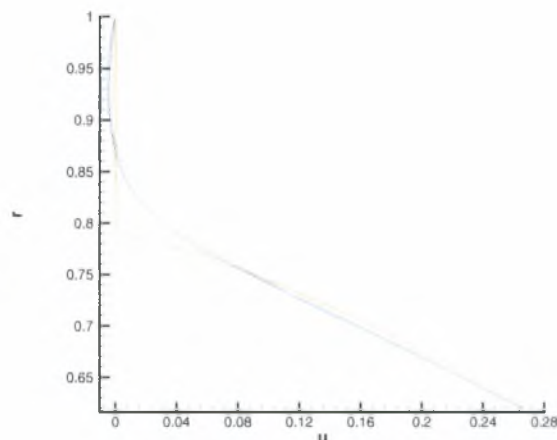


**Σχήμα 6.20 Γραμμές ροής ( $L=3\pi/4$ )**



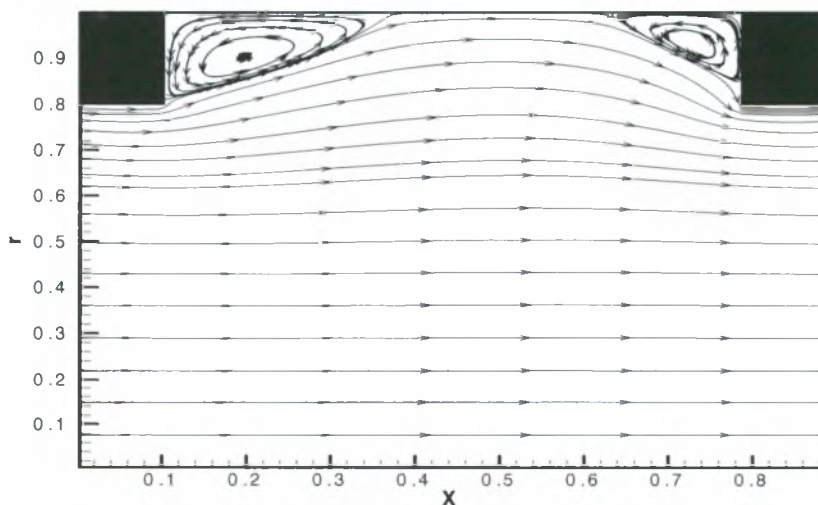
Σχήμα 6.21 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=3\pi/4$ )

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 8c υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.22 έως 6.24

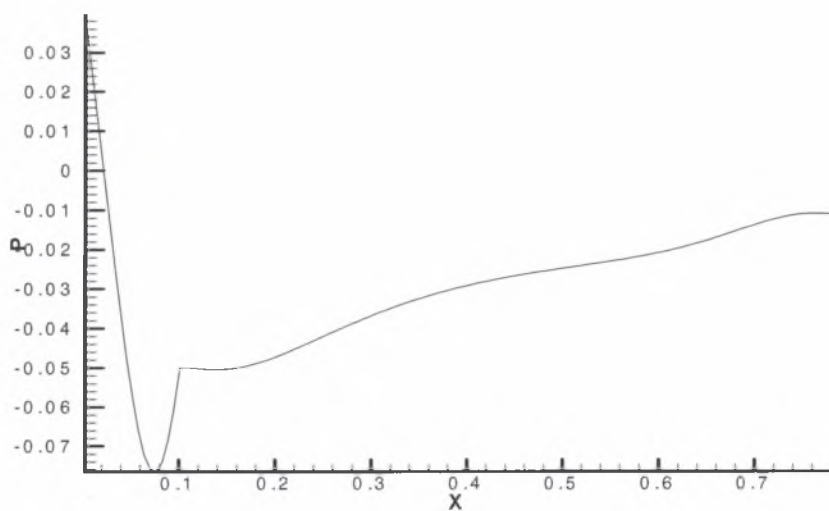


(Κόκκινη:  $x=0.0905$ , Μαύρη:  $x=0.1825$ , Μπλε:  $x=0.2469$ , Πράσινη:  $x=0.3666$ )

**Σχήμα 6.22 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=\pi/4$ )**

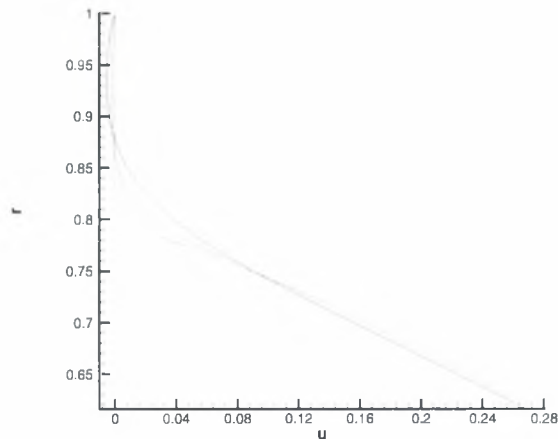


**Σχήμα 6.23 Γραμμές ροής ( $L=\pi/4$ )**



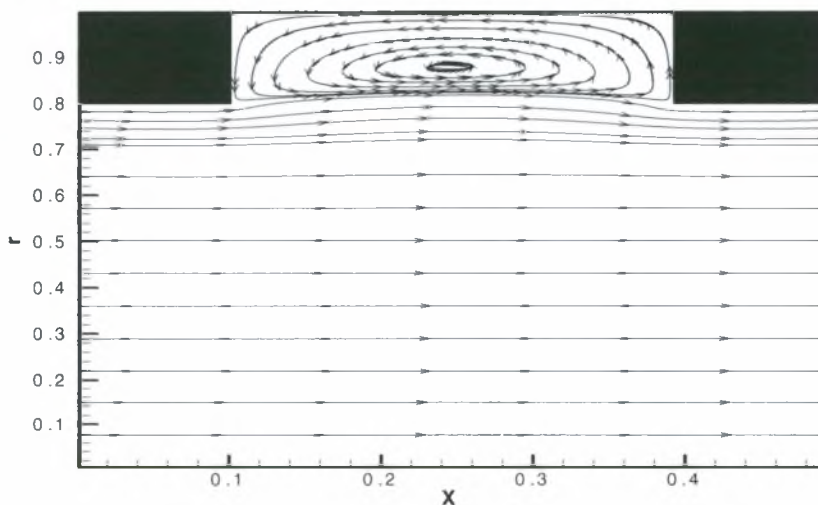
**Σχήμα 6.24 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=\pi/4$ )**

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 8d υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.24 έως 6.26

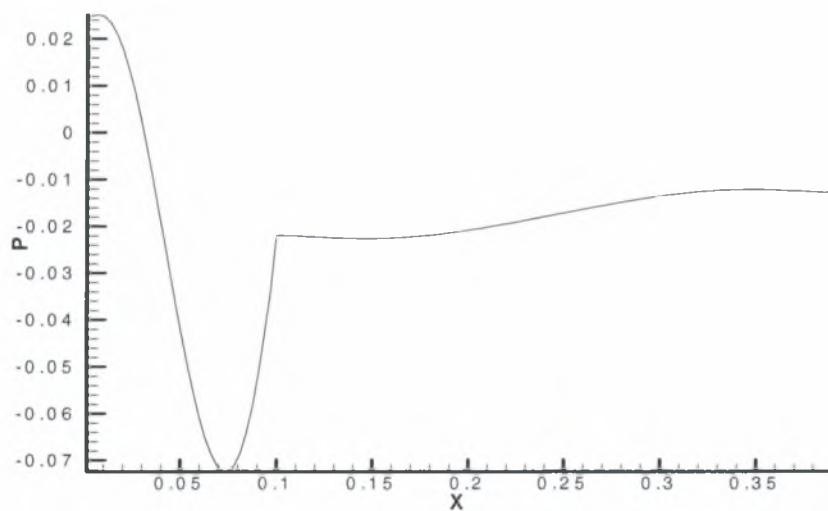


(Κόκκινη:  $x=0.11119$ , Μαύρη:  $x=0.2469$ , Μπλε:  $x=0.3420$ )

**Σχήμα 6.25 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=\pi/8$ )**



**Σχήμα 6.26 Γραμμές ροής ( $L=\pi/8$ )**



**Σχήμα 6.27 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=\pi/8$ )**

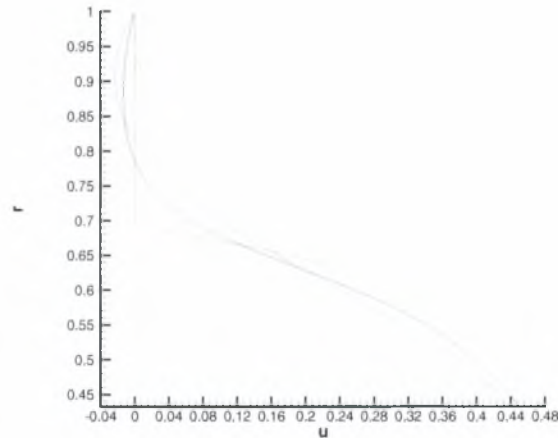


Εξετάζοντας τα παραπάνω τρία σχήματα παρατηρούμε τα κάτωθι:

- i. Ο αριθμός  $Re$  φαίνεται να έχει αρκετά μεγάλη επίδραση στο μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας γιατί από  $x_a = 0.838796$  που ήταν για  $Re=300$  και  $L=3\pi/4$  μειώθηκε στο  $x_a = 0.311107$  όταν ο  $Re$  έγινε 50.
- ii. Το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας σε αντίθεση με αυτό της πρώτης αυξάνεται όσο ελαττώνεται ο αριθμός  $Re$ . Βέβαια χρειάζεται να αναφέρουμε ότι δεν σημειώνονται τόσο μεγάλες διαφορές, δηλαδή από  $x_b = 0.04909$  που ήταν για  $Re=300$  και  $L=3\pi/4$  μειώθηκε σε  $x_b = 0.08182$  όταν ο  $Re$  πήρε την τιμή 50.
- iii. Οι δύο ανακυκλοφορίες δεν ενώνονται πλέον σε περίοδο  $\pi/4$  όπως συνέβαινε για  $Re=300$  και 200 αλλά σε περίοδο  $\pi/8$  (για  $Re=100$  και 50)

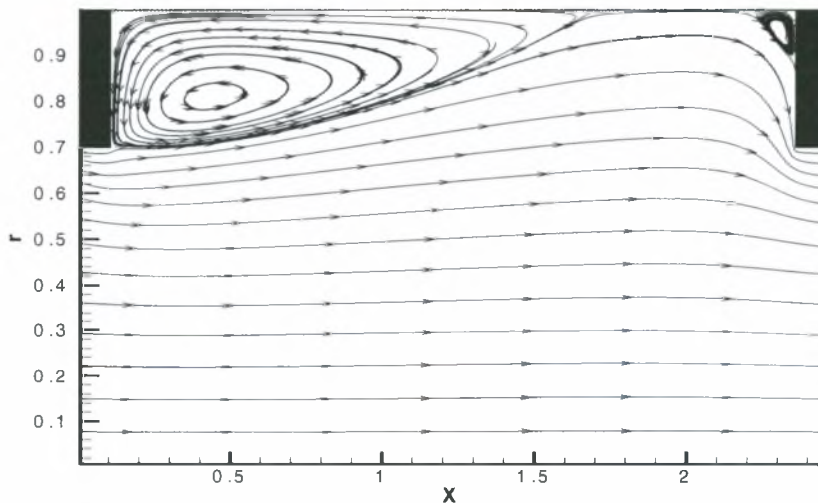
### 5.1.5 Αποτελέσματα Περίπτωσης ( $h=0.3, l=0.1, Re=300$ )

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 9a υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.27 έως 6.29

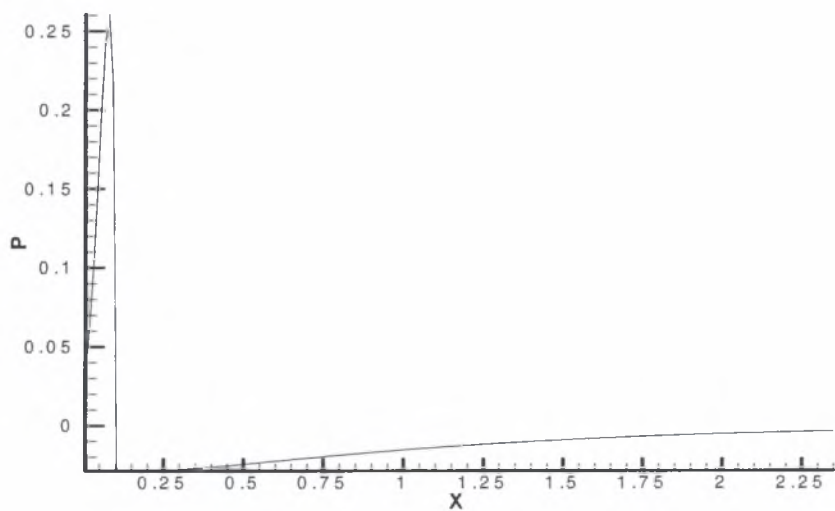


(Κόκκινη:  $x=0.0674$ , Μαύρη:  $x=0.2393$ , Μπλε:  $x=0.5215$ , Πράσινη:  $x=1.5892$ , Θάλασση:  $x=2.3009$ )

**Σχήμα 6.28 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=3\pi/4$ )**

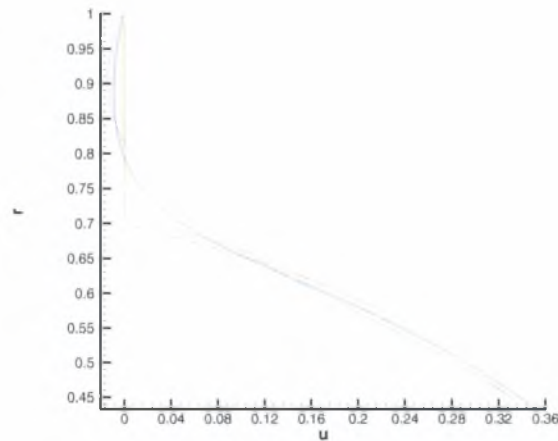


**Σχήμα 6.29 Γραμμές ροής ( $L=3\pi/4$ )**



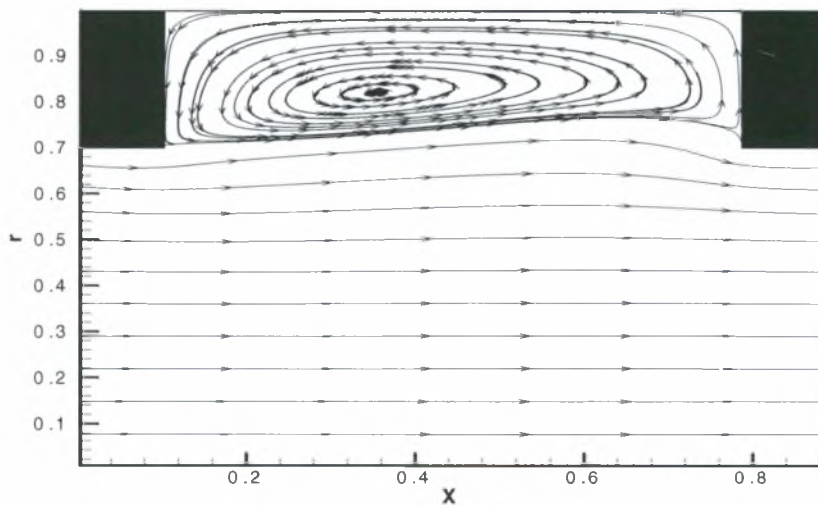
**Σχήμα 6.30 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=3\pi/4$ )**

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 9c υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.30 έως 6.32

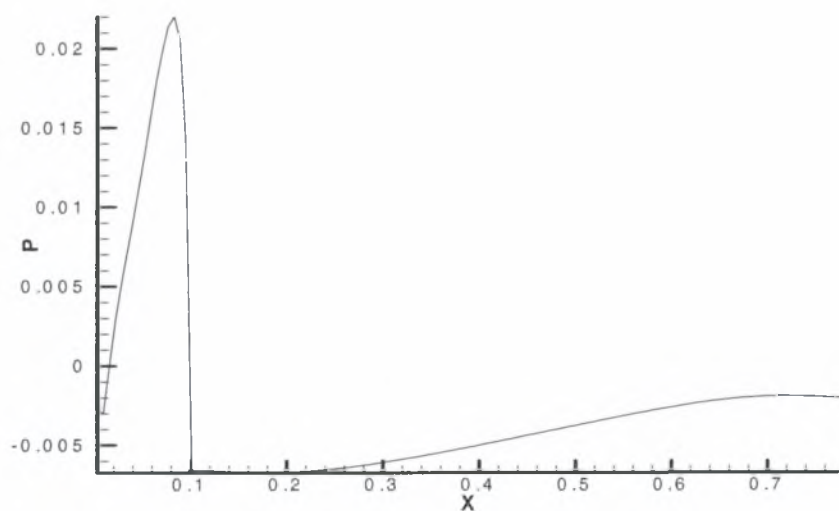


(Κόκκινη:  $x=0.1073$ , Μαύρη:  $x=0.2423$ , Μπλε:  $x=0.4141$ , Πράσινη:  $x=0.7577$ )

**Σχήμα 6.31 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=\pi/4$ )**



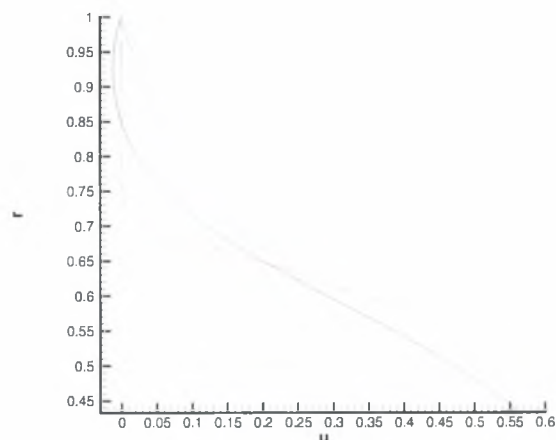
**Σχήμα 6.32 Γραμμές ροής ( $L=\pi/4$ )**



**Σχήμα 6.33 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=\pi/4$ )**

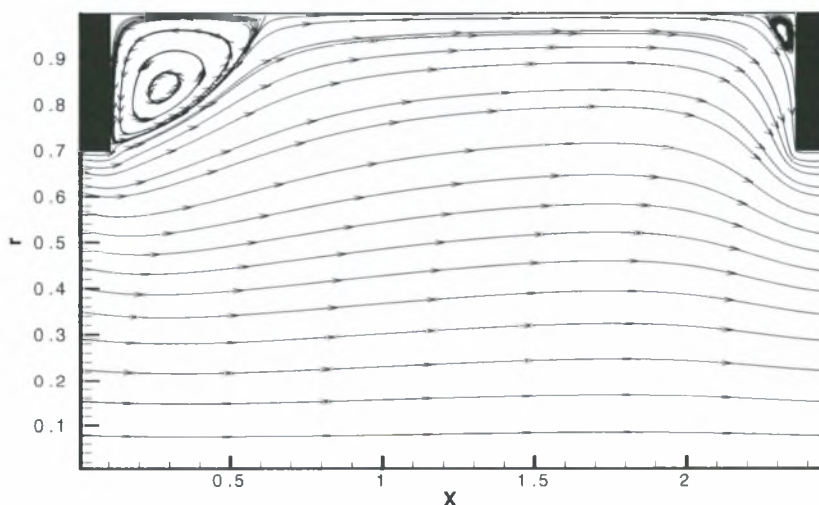
### 5.1.6 Αποτελέσματα Περίπτωσης ( $h=0.3$ , $l=0.1$ , $Re=50$ )

Τα αποτελέσματα της περίπτωσης 10a υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.33 έως 6.35



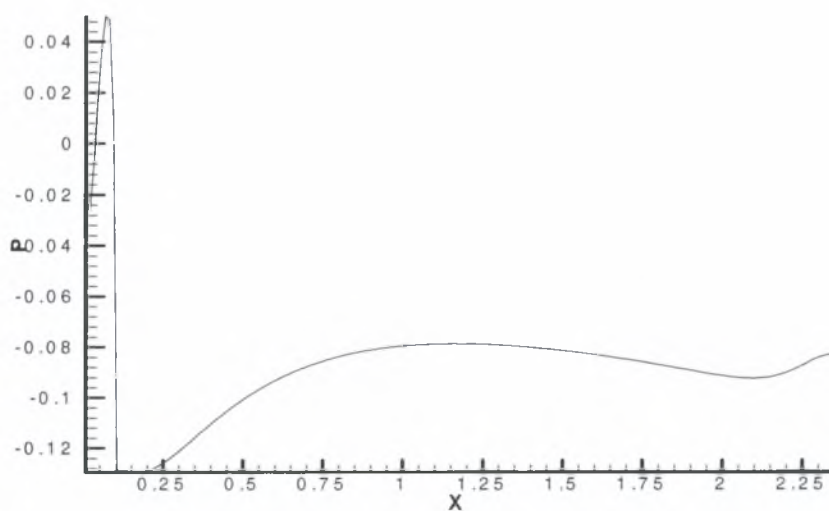
(Κόκκινη:  $x=0.1288$ , Μαύρη:  $x=0.3252$ , Μπλε:  $x=0.8528$ , Πράσινη:  $x=1.711$ , Θαλασσί:  $x=2.313$ )

**Σχήμα 6.34 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=3\pi/4$ )**



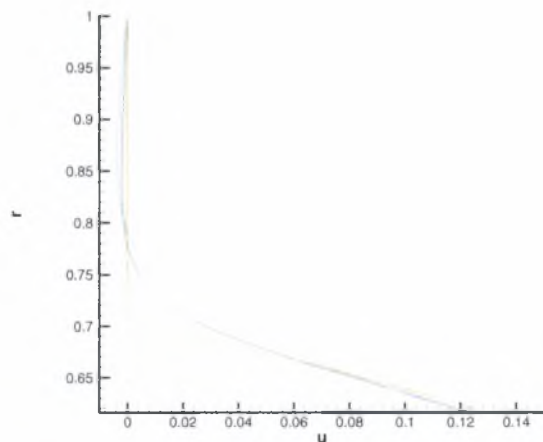
**Σχήμα 6.35 Γραμμές ροής ( $L=3\pi/4$ )**





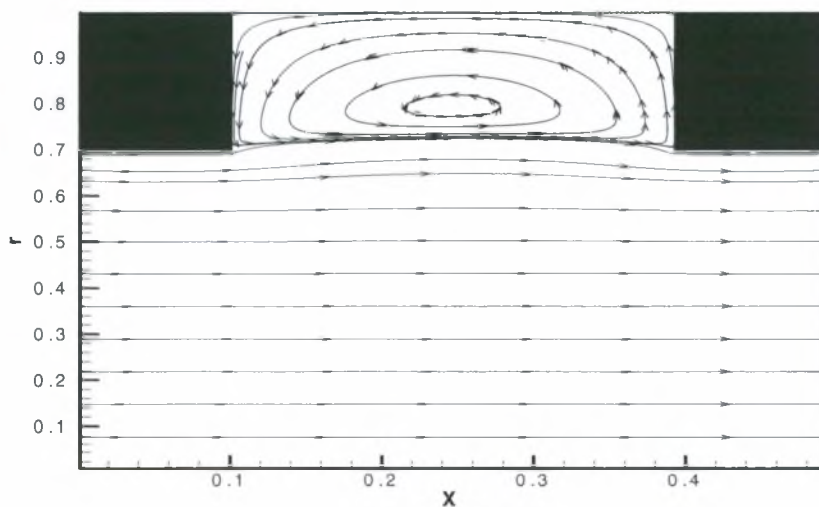
**Σχήμα 6.36 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=3\pi/4$ )**

Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 10d υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.36 έως 6.38

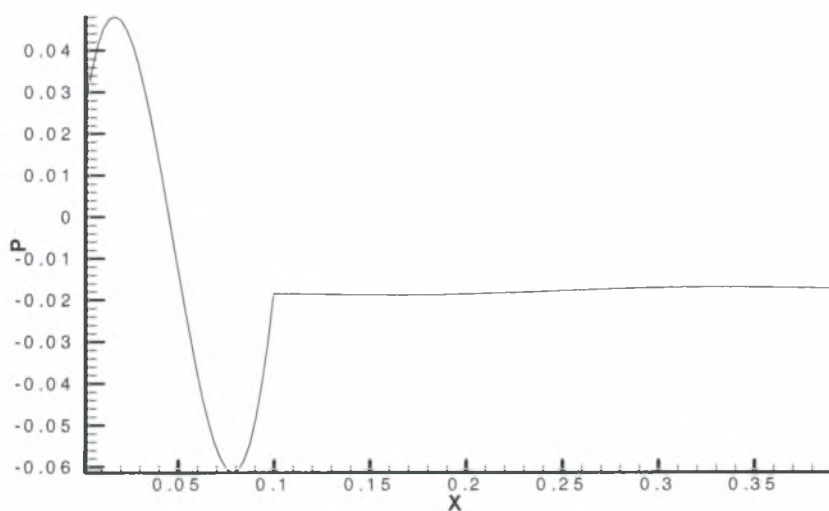


(Κόκκινη:  $x=0.1058$ , Μαύρη:  $x=0.1672$ , Μπλε:  $x=0.2469$ , Πράσινη:  $x=0.3666$ )

**Σχήμα 6.37 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=\pi/8$ )**



**Σχήμα 6.38 Γραμμές ροής ( $L=\pi/8$ )**

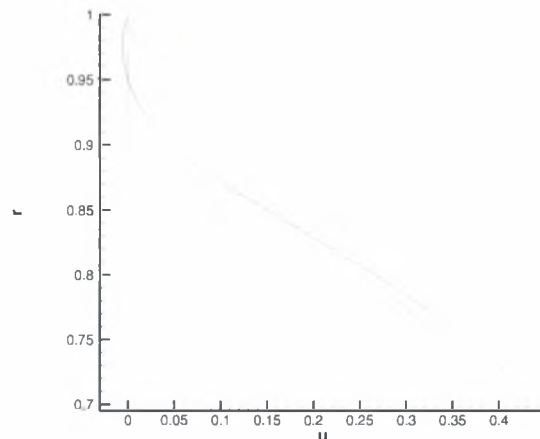


**Σχήμα 6.39 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=\pi/8$ )**

Εξετάζοντας τα παραπάνω σχήματα όπου το ύψος του εμποδίου είναι ακόμα μεγαλύτερο ( $h=0.3$ ) προκύπτουν τα ίδια συμπεράσματα με αυτά της περίπτωσης για ύψος  $h=0.2$  μόνο που συμβαίνουν σε ακόμα μεγαλύτερο βαθμό. Για περίοδο  $L=3\pi/4$  και αριθμό  $Re=300$  το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας γίνεται  $x_a = 1.61192$  (είναι οχταπλάσιο σε σχέση με εκείνο της περίπτωσης με ύψος εμποδίου  $0.1$  και διπλάσιο σε σχέση με αυτό όπου το ύψος του ήταν  $0.2$ .) Επίσης το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας στην περίπτωση αυτή είναι εξαπλάσιο και τριπλάσιο αντίστοιχα σε σχέση με εκείνα των δύο προηγούμενων περιπτώσεων εμποδίων. Για αριθμό  $Re=300$  και περίοδο  $L=\pi/2$  σχηματίζεται μια ανακυκλοφορία ενώ για αριθμούς  $Re$  200, 100, 50 οι ανακυκλοφορίες σχηματίζονται όταν η απόσταση μεταξύ των εμποδίων γίνει  $\pi/4$ .

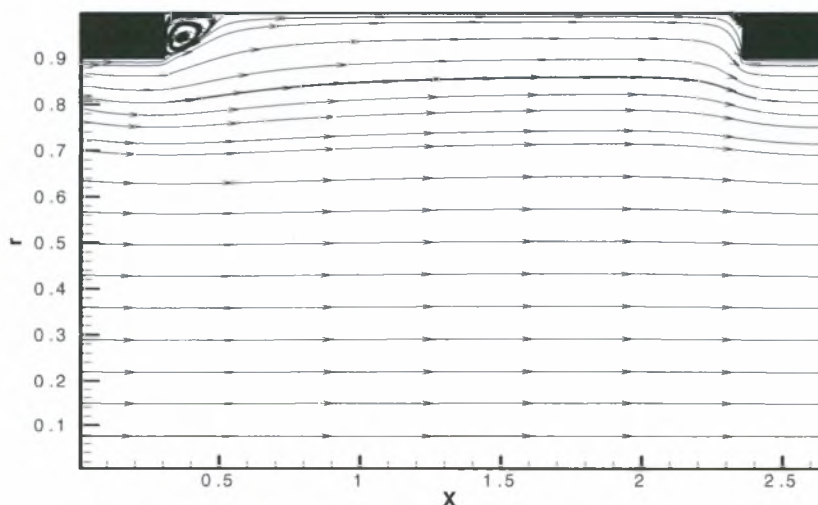
### 5.1.7 Αποτελέσματα Περίπτωσης ( $h=0.1$ , $l=0.3$ , $Re=300$ )

Τα αποτελέσματα της περίπτωσης 13a υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.39 έως 6.41

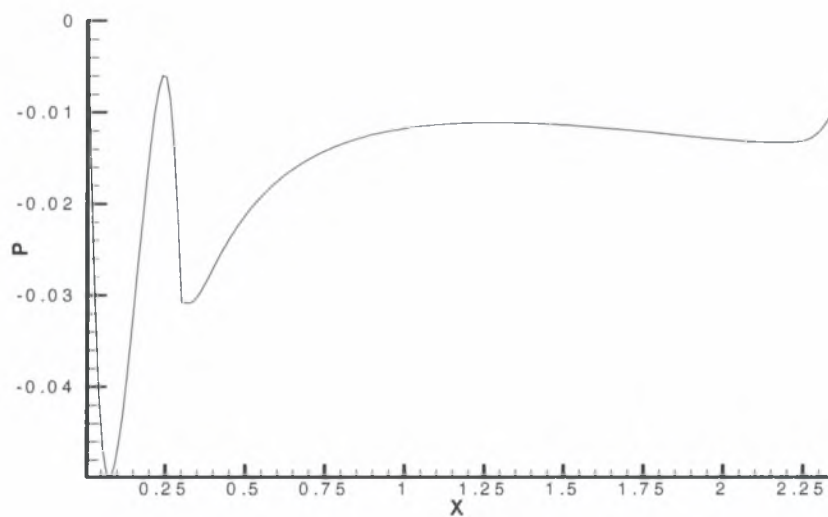


(Κόκκινη:  $x=0.3006$ , Μαύρη:  $x=0.3865$ , Μπλε:  $x=0.6074$ , Πράσινη:  $x=1.711$ , Θαλασσί:  $x=2.35$ )

**Σχήμα 6.40 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=3\pi/4$ )**



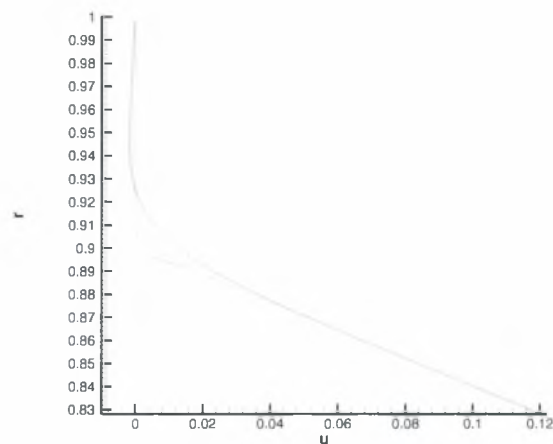
**Σχήμα 6.41 Γραμμές ροής ( $L=3\pi/4$ )**



**Σχήμα 6.42 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=3\pi/4$ )**

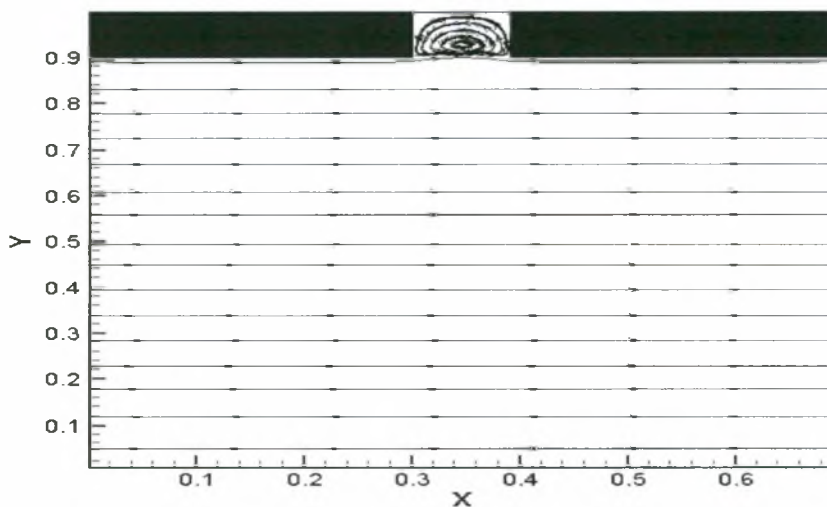


Τα αποτελέσματα της Περίπτωσης 13d υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.42 έως 6.44

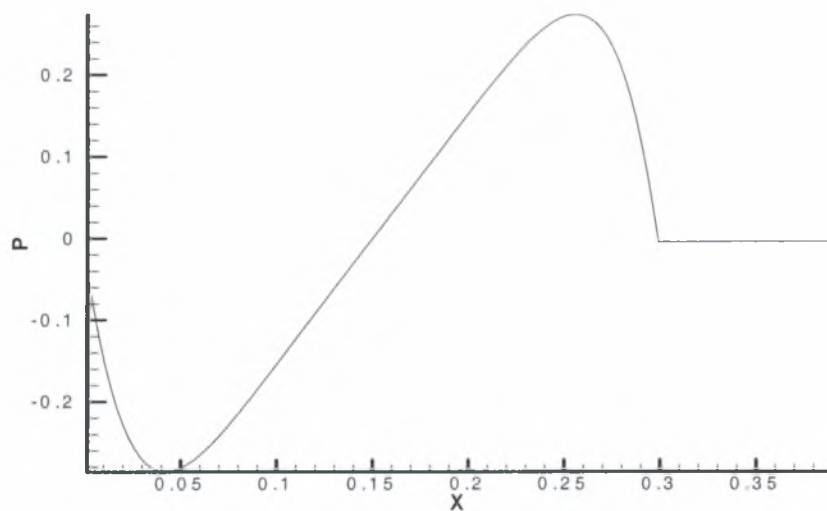


(Κόκκινη:  $x=0.3021$ , Μαύρη:  $x=0.3482$ )

**Σχήμα 6.43 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=\pi/8$ )**



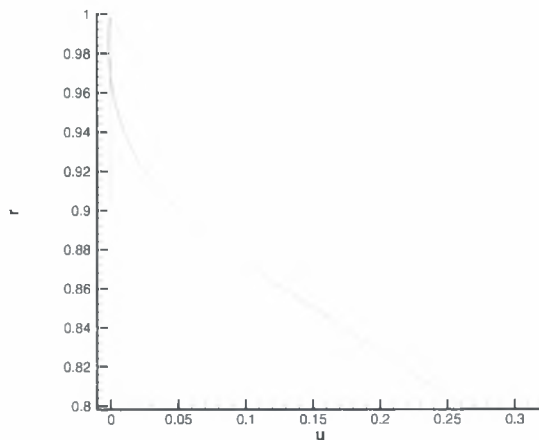
**Σχήμα 6.44 Γραμμές ροής ( $L=\pi/8$ )**



**Σχήμα 6.45 Κατανομή της πίεσης στον άξονα ( $L=\pi/8$ )**

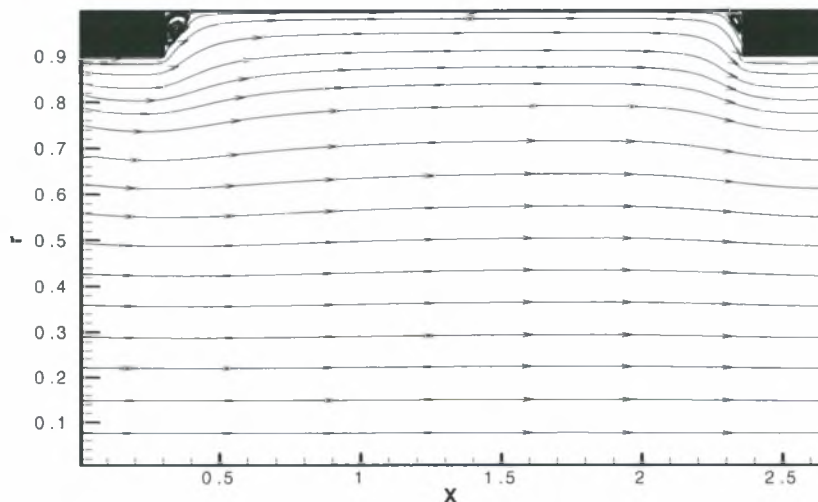
### 5.1.8 Αποτελέσματα Περίπτωσης ( $h=0.1$ , $l=0.3$ , $Re=50$ )

Τα αποτελέσματα της περίπτωσης 16α υπό τη μορφή κατανομών αξονικής ταχύτητας, ροϊκών γραμμών και κεντρικής γραμμής πίεσης παρουσιάζονται στα Σχήματα 6.45 έως 6.47

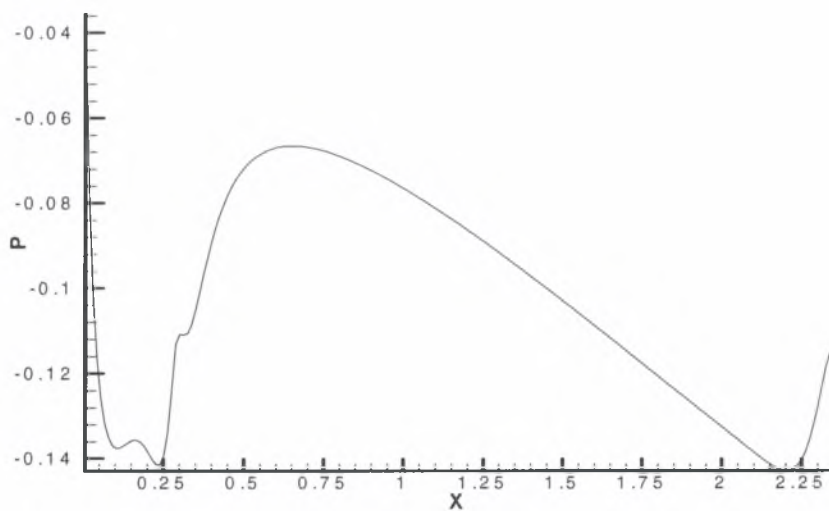


(Κόκκινη:  $x=0.3$ , Μαύρη:  $x=0.362$ , Μπλε:  $x=0.546$ , Πράσινη:  $x=1.52784$ , Γραυσή:  $x=2.3377$ )

**Σχήμα 6.46 Κατανομή αξονικής ταχύτητας ( $L=3\pi/4$ )**



**Σχήμα 6.47 Γραμμές ροής ( $L=3\pi/4$ )**



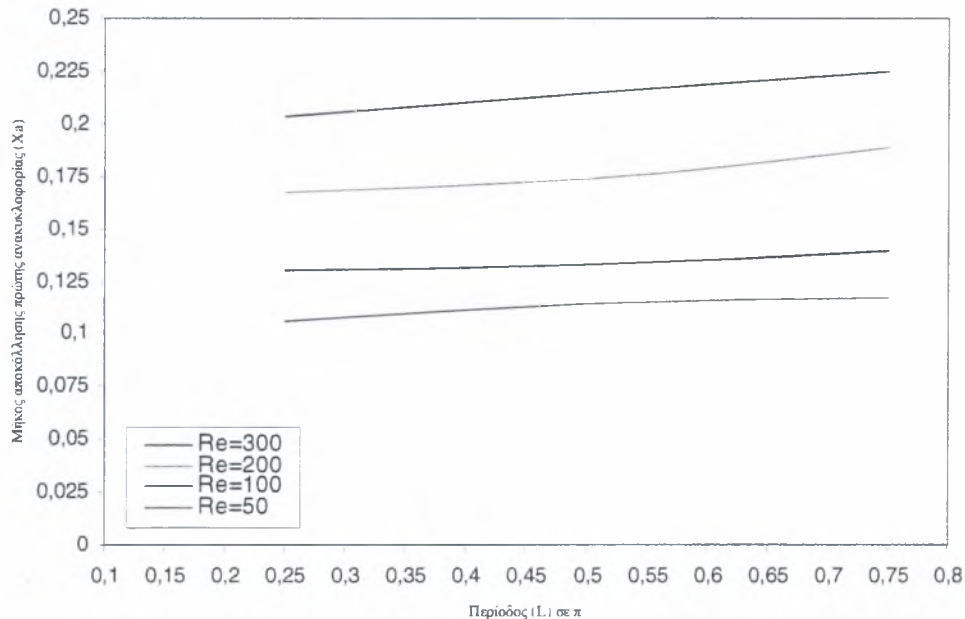
**Σχήμα 6.48 Κατανομή της πίεσης ( $L=3\pi/4$ )**

Από τα παραπάνω σχήματα προκύπτουν τα εξής συμπεράσματα:

- i. Η περίοδος έχει μικρή επίδραση στα μήκη επανακόλλησης των δύο ανακυκλοφοριών. Πιο συγκεκριμένα όσο μειώνεται η περίοδος ελαττώνεται ελάχιστα το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ( $x_a$ ) και αυξάνεται αυτό της δεύτερης μέχρι την περίοδο  $\pi/8$  όπου ενώνονται. Για αριθμό  $Re=300$  και  $L=3\pi/4$  τα μήκη επανακόλλησης των ανακυκλοφοριών είναι  $x_a = 0.225204$  και  $x_b = 0.02455$  αντίστοιχα ενώ για  $L=\pi/4$  παίρνουν τιμές:  $x_a = 0.203728$  και  $x_b = 0.049087$
- ii. Ο αριθμός  $Re$  φαίνεται να έχει μεγαλύτερη επίδραση στο μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας και λιγότερη σε αυτό της δεύτερης. Χαρακτηριστικά αναφέρουμε την περίπτωση για  $Re=50$  και  $L=3\pi/4$  όπου τα μήκη τους λαμβάνουν τις εξής τιμές: 0.114757 για την πρώτη και 0.04909 για την δεύτερη.

### 5.1.9 Συγκεντρωτικά αποτελέσματα

Στα Σχήματα 6.49 μέχρι 6.52 παραθέτουμε κάποια συγκεντρωτικά αποτελέσματα που αφορούν το εμπόδιο του οποίου οι διαστάσεις είναι  $h=0.1$  και  $l=0.1$

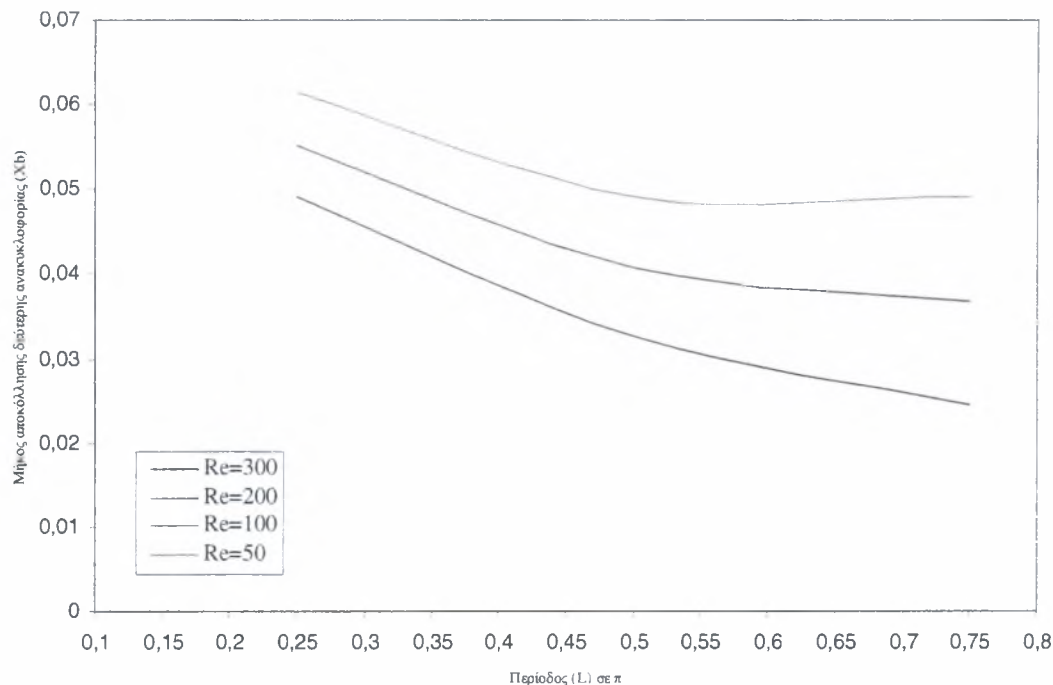


**Σχήμα 6.49** Μεταβολή του μήκους αποκόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας  $X_a$  με την περίοδο  $L$  για διάφορους  $Re$  ( $h=0.1$  και  $l=0.1$ )

Από το Σχήμα 6.49 εξάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Για τον ίδιο αριθμό  $Re$  όσο αυξάνεται η περίοδος τόσο μεγαλώνει το μήκος αποκόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ( $x_a$ )
- Όσο ελαττώνεται ο αριθμός  $Re$  μειώνεται και η κλίση των καμπυλών που σημαίνει ότι μειώνεται και το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ( $x_a$ )



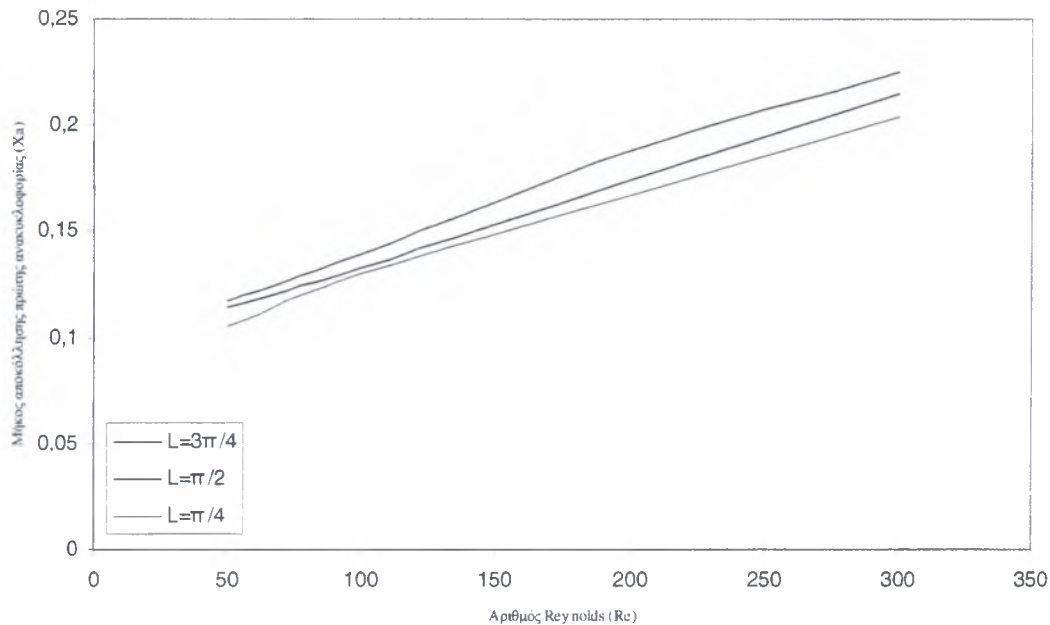


**Σχήμα 6.50** Μεταβολή του μήκους αποκόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας  $X_b$  με την περίοδο  $L$  για διάφορους αριθμούς  $Re$  ( $h=0.1$  και  $l=0.1$ )

Από το Σχήμα 6.50 εξάγονται τα κάτωθι συμπεράσματα:

- Για τον ίδιο αριθμό  $Re$  όσο αυξάνεται η περίοδος τόσο μικραίνει και το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας ( $x_b$ )
- Όσο ελαττώνεται ο αριθμός  $Re$  αυξάνεται η κλίση των καμπυλών που σημαίνει ότι αυξάνεται και το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας ( $x_b$ )
- Για αριθμό  $Re$  300 και 200 δεν παρατηρούνται αλλαγές στο μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας ( $x_b$ )

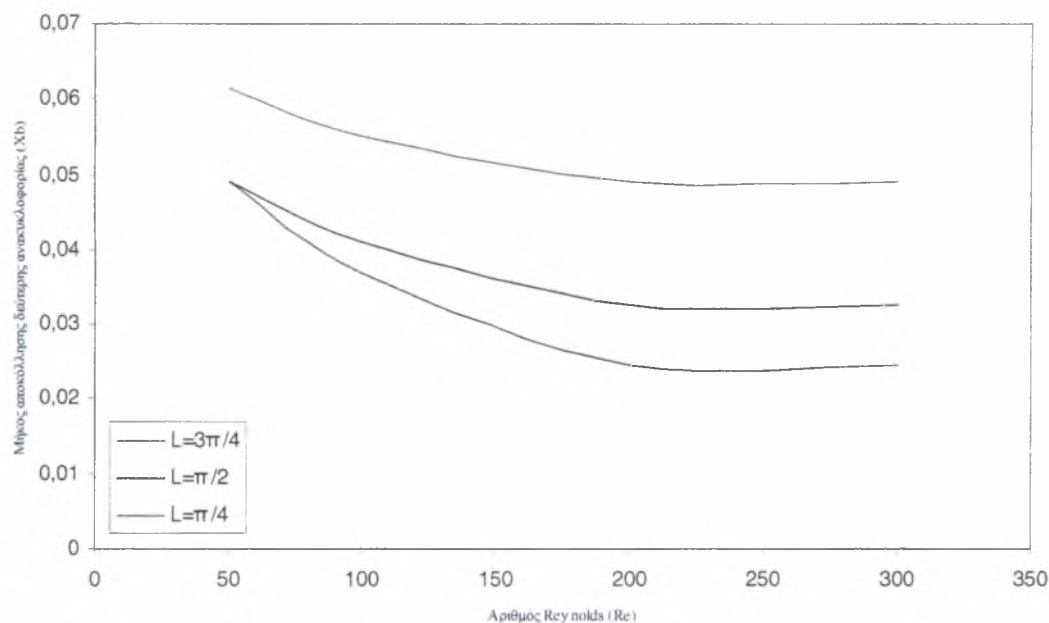
Συμπερασματικά μπορούμε να πούμε ότι συμβαίνουν ακριβώς τα αντίθετα σε σχέση με το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας



**Σχήμα 6.51 Μεταβολή του μήκους αποκόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας  $X_a$  με τον αριθμό  $Re$  για διάφορες περιόδους  $L$  ( $h=0.1$  και  $l=0.1$ )**

Από το Σχήμα 6.51 εξάγονται τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Με σταθερές τις διαστάσεις του εμποδίου, για την ίδια περίοδο ( $L$ ) όσο αυξάνεται ο αριθμός  $Re$  τόσο αυξάνεται το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ( $x_a$ )
- Όσο ελαττώνεται η περίοδος  $L$  παρατηρείται μείωση της κλίσης των καμπυλών που σημαίνει ότι μειώνεται και το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ( $x_a$ )

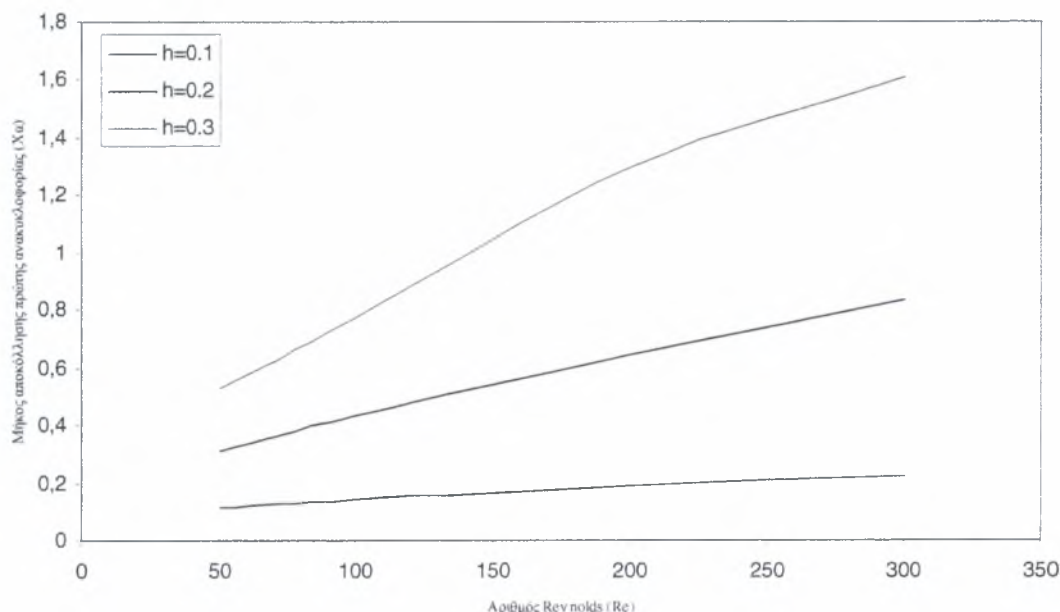


**Σχήμα 6.52** Μεταβολή του μήκους αποκόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας  $X_b$  με τον αριθμό  $Re$  για διάφορες περιόδους  $L$  ( $h=0.1$  και  $l=0.1$ )

Από το Σχήματος 6.52 προκύπτουν τα παρακάτω συμπεράσματα:

- Με σταθερές τις διαστάσεις του εμποδίου, για την ίδια περίοδο ( $L$ ) όσο αυξάνεται ο αριθμός  $Re$  τόσο μειώνεται το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας ( $x_b$ ).
- Όσο ελαττώνεται η περίοδος ( $L$ ) παρατηρείται αύξηση της κλίσης των καμπυλών που σημαίνει ότι το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας ( $x_b$ ) αυξάνεται.

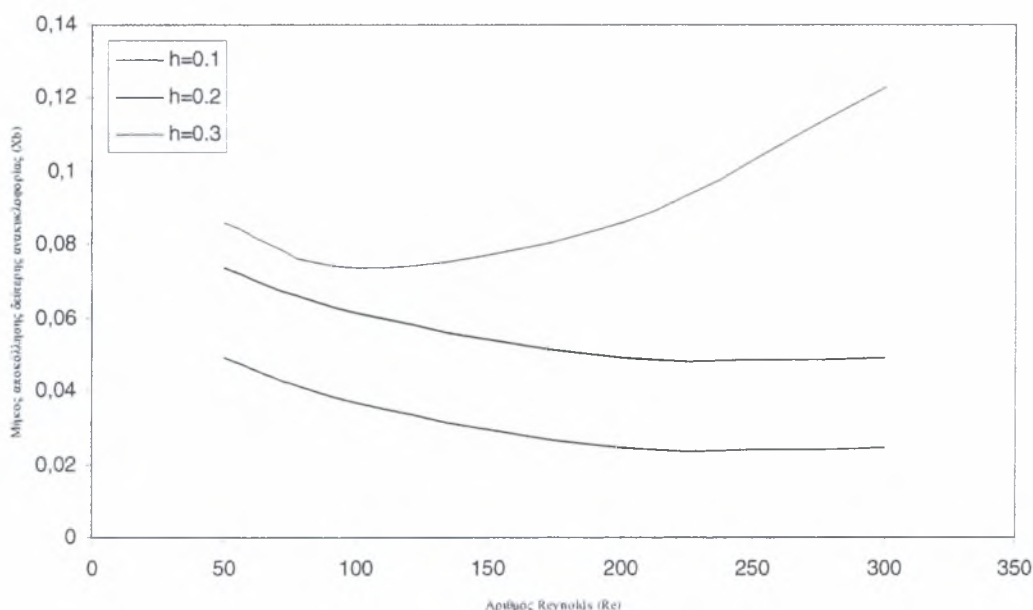
Στα Σχήματα 6.53 μέχρι 6.56 γίνεται σύγκριση των μηκών επανακόλλησης των δύο ανακυκλοφοριών για διάφορους τιμές ύψους εμποδίων, περιόδων και αριθμών  $Re$



**Σχήμα 6.53** Μεταβολή του μήκους αποκόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ( $X_a$ ) με τον αριθμό  $Re$  για διάφορα ύψη εμποδίων ( $L=3\pi/4$ )

Μελετώντας το Σχήμα 6.53 παρατηρούμε τα εξής:

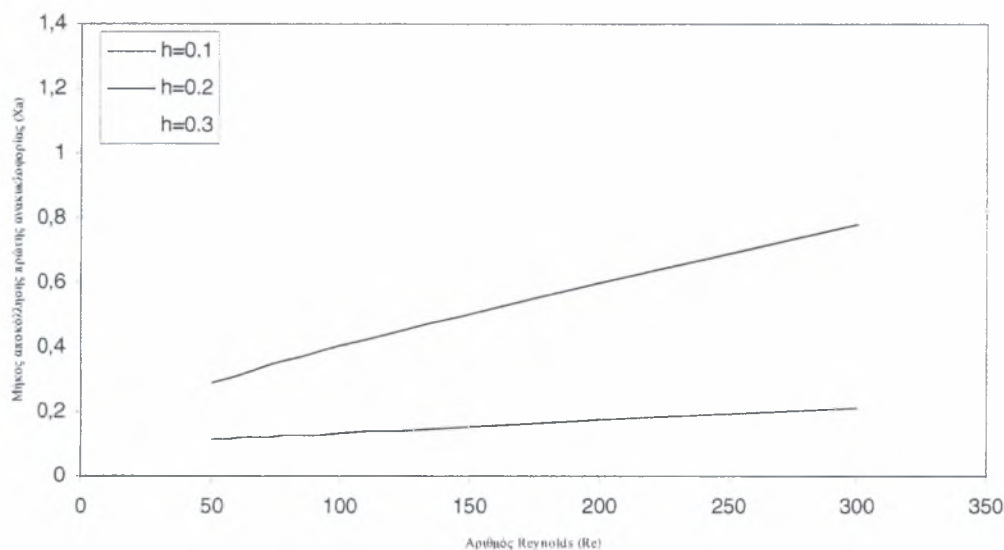
- Για σταθερό ύψος ( $h$ ) εμποδίου όσο αυξάνεται ο αριθμός  $Re$  αυξάνεται το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ( $x_a$ )
- Όσο αυξάνεται το ύψος του εμποδίου η κλίσεις των καμπυλών λαμβάνουν μεγαλύτερες τιμές που αυτό μεταφράζεται σε μεγαλύτερα μήκη επανακόλλησης για την πρώτη ανακυκλοφορία. Συγκεκριμένα για ύψος  $h=0.2$  και  $0.3$  οι τιμές αυξάνονται με πολύ μεγαλύτερους ρυθμούς σε σχέση με την περίπτωση όπου έχει ύψος  $h=0.1$ .



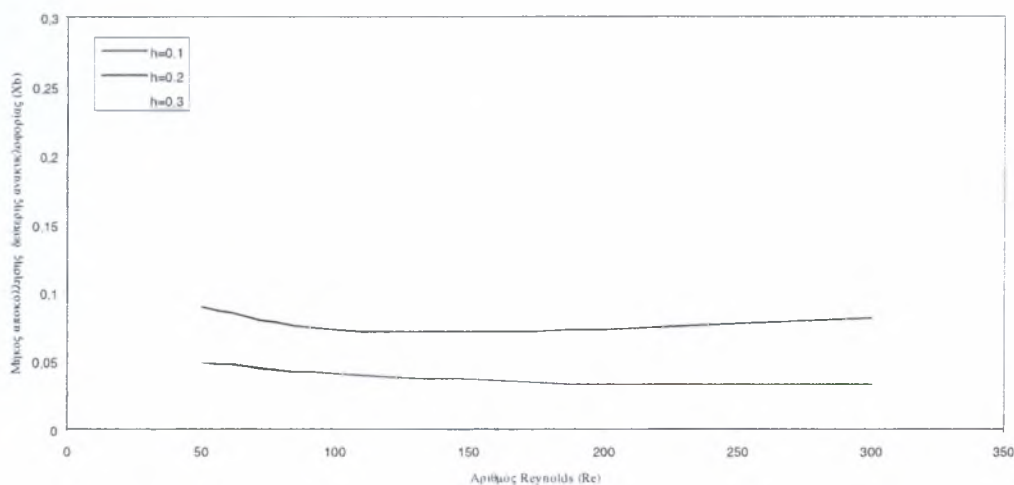
**Σχήμα 6.54 Μεταβολή του μήκους αποκόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας ( $X_b$ ) με τον αριθμό  $Re$  για διάφορα ύψη εμποδίων ( $L=3\pi/4$ )**

Μελετώντας την γραφική παράσταση του Σχήματος 6.54 εξάγονται τα ακόλουθα συμπεράσματα:

- Για σταθερό ύψος ( $h$ ) εμποδίου όσο αυξάνεται ο αριθμός  $Re$  μειώνεται το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας ( $x_b$ ). Στην περίπτωση όμως όπου το ύψος είναι 0.3 παρατηρείται ακριβώς το αντίθετο δηλαδή μείωση του μήκους μήκος επανακόλλησης όταν ο αριθμός  $Re$  ελαττώνεται με εξαίρεση την περιοχή όπου ο αριθμός  $Re$  μειώνεται από το 100 στο 50 και εκεί εντοπίζεται μια τοπική αύξηση του μήκους.
- Όσο αυξάνεται το ύψος του εμποδίου το μήκος μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας ( $x_b$ ) λαμβάνει μεγαλύτερες τιμές.



**Σχήμα 6.55** Μεταβολή του μήκους αποκόλλησης της ανακυκλοφορίας (Xa) με τον αριθμό Re για διάφορα ύψη εμποδίων ( $L=\pi/2$ )



**Σχήμα 6.56** Μεταβολή του μήκους αποκόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας (Xb) με τον αριθμό Re για διάφορα ύψη εμποδίων ( $L=\pi/2$ )

Στην περίπτωση όπου η περίοδος μειώνεται από  $3\pi/4$  σε  $\pi/2$  εξάγονται ακριβώς τα ίδια συμπεράσματα για το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας με τις προηγούμενες περιπτώσεις μόνο που συμβαίνουν σε μικρότερο βαθμό.

Αν συγκρίνουμε τις τιμές από τα μήκη επανακόλλησης των ανακυκλοφοριών για το εμπόδιο που έχει μήκος  $l=0.1$  με αυτές του εμποδίου που έχει μήκος  $l=0.3$  θα βγάλουμε τα εξής συμπεράσματα:

- i. Το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας μεταβάλλεται τόσο λίγο ώστε μπορεί να θεωρηθεί ότι δεν αλλάζει καθόλου. Για παράδειγμα για αριθμό  $Re=300$  και  $L=3\pi/4$  το μήκος της για το εμπόδιο με το τριπλάσιο ύψος είναι  $x_o = 0.221553$  που είναι ελάχιστα μεγαλύτερο από την τιμή που είχε για το πιο 'στενό' εμπόδιο ( $x_o = 0.225204$ )
- ii. Επίσης όσο μειώνεται η περίοδος οι διαφορές γίνονται όλο και μικρότερες. Για αριθμό  $Re=300$  και  $L=\pi/4$  το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας για το εμπόδιο με ύψος  $0.1$  είναι  $x_o = 0.203728$  που είναι ελάχιστα μεγαλύτερο από αυτό με μήκος  $l=0.3$  που η τιμή του είναι:  $x_o = 0.200078$ .
- iii. Αντίθετα με ότι συνέβαινε όταν ελαττωνόταν η περίοδος συμβαίνει με τον αριθμό  $Re$ . Παραδείγματος χάρη όταν ο αριθμός  $Re=200$  το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας για το 'μακρύ' εμπόδιο είναι:  $x_o = 0.160194$  ενώ για το πιο 'κοντό' παίρνει την τιμή:  $x_o = 0.188388$
- iv. Οι τιμές από τα μήκη της δεύτερης ανακυκλοφορίας αρκετές φορές ταυτίζονται για τους δύο τύπους εμποδίων.



### 5.1.10 Πίνακας αποτελεσμάτων

Στους παρακάτω πίνακες δίνονται τα συγκεντρωτικά αριθμητικά αποτελέσματα όλων των περιπτώσεων ροής που μελετήθηκαν.

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
1a	128X192	0.1	0.1	300	$3\pi/4$	0.225204	0.02455
1b	128X192	0.1	0.1	300	$\pi/2$	0.214977	0.03273
1c	128X128	0.1	0.1	300	$\pi/4$	0.203728	0.049087
1d	128X128	0.1	0.1	300	$\pi/8$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
2a	128X192	0.1	0.1	200	$3\pi/4$	0.188388	0.02455
2b	128X192	0.1	0.1	200	$\pi/2$	0.174071	0.03273
2c	128X128	0.1	0.1	200	$\pi/4$	0.166913	0.049087
2d	128X128	0.1	0.1	200	$\pi/8$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
3a	128X192	0.1	0.1	100	$3\pi/4$	0.139301	0.03682
3b	128X192	0.1	0.1	100	$\pi/2$	0.133165	0.04091
3c	128X128	0.1	0.1	100	$\pi/4$	0.130097	0.055233
3d	128X128	0.1	0.1	100	$\pi/8$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
4a	128X192	0.1	0.1	50	$3\pi/4$	0.114757	0.04909
4b	128X192	0.1	0.1	50	$\pi/2$	0.116803	0.04909
4c	128X128	0.1	0.1	50	$\pi/4$	0.105553	0.061359
4d	128X128	0.1	0.1	50	$\pi/8$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
5a	128X192	0.2	0.1	300	$3\pi/4$	0.838796	0.04909
5b	128X192	0.2	0.1	300	$\pi/2$	0.779482	0.08182
5c	128X128	0.2	0.1	300	$\pi/4$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
6a	128X192	0.2	0.1	200	$3\pi/4$	0.642447	0.04909
6b	128X192	0.2	0.1	200	$\pi/2$	0.599495	0.07364
6c	128X128	0.2	0.1	200	$\pi/4$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
7a	128X192	0.2	0.1	100	$3\pi/4$	0.433825	0.06136
7b	128X192	0.2	0.1	100	$\pi/2$	0.403146	0.07364
7c	128X128	0.2	0.1	100	$\pi/4$	0.406214	0.190213

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
8a	128X192	0.2	0.1	50	$3\pi/4$	0.31107	0.07363
8b	128X192	0.2	0.1	50	$\pi/2$	0.288608	0.09
8c	128X128	0.2	0.1	50	$\pi/4$	0.277359	0.153398
8d	128X128	0.2	0.1	50	$\pi/8$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
9a	128X192	0.3	0.1	300	$3\pi/4$	1.61192	0.12272
9b	128X128	0.3	0.1	300	$\pi/2$	-	-
9c	128X128	0.3	0.1	300	$\pi/4$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
10a	128X192	0.3	0.1	200	$3\pi/4$	1.30695	0.0859
10b	128X128	0.3	0.1	200	$\pi/2$	1.17218	0.25362
10c	128X128	0.3	0.1	200	$\pi/4$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
11a	128X192	0.3	0.1	100	$3\pi/4$	0.777437	0.07363
11b	128X128	0.3	0.1	100	$\pi/2$	0.69767	0.12272
11c	128X128	0.3	0.1	100	$\pi/4$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
12a	128X192	0.3	0.1	50	$3\pi/4$	0.532	0.0859
12b	128X192	0.3	0.1	50	$\pi/2$	0.476777	0.11454
12c	128X128	0.3	0.1	50	$\pi/4$	-	-
12d	128X128	0.3	0.1	50	$\pi/8$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
13a	128X192	0.1	0.3	300	$3\pi/4$	0.221553	0.02455
13b	128X192	0.1	0.3	300	$\pi/2$	0.203146	0.03273
13c	128X128	0.1	0.3	300	$\pi/4$	0.20078	0.067495
13d	128X128	0.1	0.3	300	$\pi/8$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
14a	128X192	0.1	0.3	200	$3\pi/4$	0.160194	0.02455
14b	128X192	0.1	0.3	200	$\pi/2$	0.170421	0.04091
14c	128X128	0.1	0.3	200	$\pi/4$	0.163262	0.067495
14d	128X128	0.1	0.3	200	$\pi/8$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
15a	128X192	0.1	0.3	100	$3\pi/4$	0.135651	0.03682
15b	128X192	0.1	0.3	100	$\pi/2$	0.129515	0.04909
15c	128X128	0.1	0.3	100	$\pi/4$	0.120311	0.067495
15d	128X128	0.1	0.3	100	$\pi/8$	-	-

Περίπτωση	Πλέγμα	h	l	Re	L	$x_a$	$x_b$
16a	128X192	0.1	0.3	50	$3\pi/4$	0.111107	0.04909
16b	128X192	0.1	0.3	50	$\pi/2$	0.104971	0.05727
16c	128X128	0.1	0.3	50	$\pi/4$	0.101903	0.067495
16d	128X128	0.1	0.3	50	$\pi/8$	-	-

## 5.2 Αποτελέσματα παραμετρικής μελέτης για ροή με σωματίδια

Στο τμήμα αυτό παραθέτουμε τα στοιχεία της παραμετρικής μελέτης που έγιναν για σωματίδια διαμέτρων 2 $\mu\text{m}$  (αιμοπετάλια), 8 $\mu\text{m}$  (ερυθρά αιμοσφαίρια ή ερυθροκύτταρα) και 15 $\mu\text{m}$  (λευκά αιμοσφαίρια ή λευκοκύτταρα)

Σκοπός της μελέτης αυτής είναι να υπολογιστούν και να εξετασθούν οι τροχιές τους καθώς και να παρατηρήσουμε ποια από αυτά συγκεντρώνονται στις περιοχές που έχουμε αποκόλληση της ροής (ανακυκλοφορία).

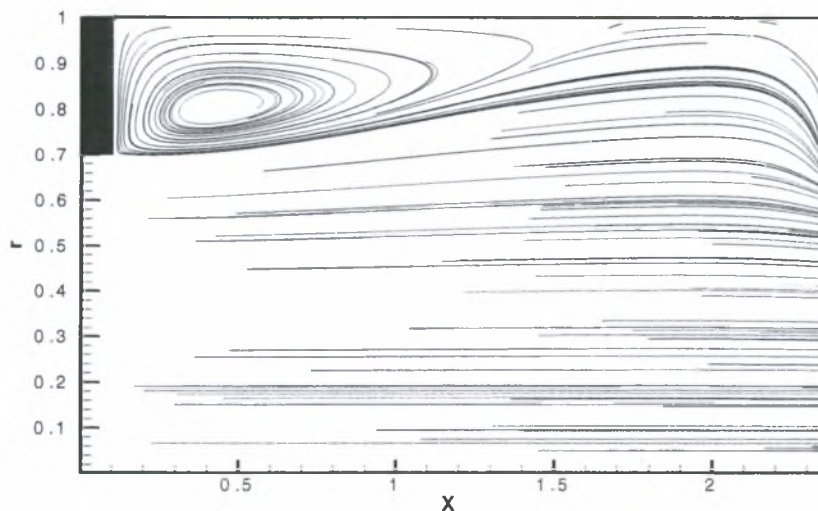
Στους υπολογισμούς που παρουσιάζονται παρακάτω τα σωματίδια ξεκινάνε με την ταχύτητα του ρευστού, θεωρούνται σφαιρικά και δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους αλλά ούτε και με τη συνεχή φάση, έχουν απαλειφθεί οι ανυψωτικές δυνάμεις (δύναμη Saffman, Magnus) και οι δυνάμεις επιτάχυνσης (Basset, κλίση πίεσης, προστιθέμενης μάζας). Οι μόνες δυνάμεις που επιδρούν στα σωματίδια είναι η οπισθέλκουσα και η βαρύτητα όπου για την δύναμη της

οπισθέλκουσα ισχύει ο νόμος του Stokes και μια διόρθωση του (Νόμος Van Allen).Επίσης ο συντελεστή οπισθέλκουσας δεν λαμβάνει υπόψη τα τοιχώματα.

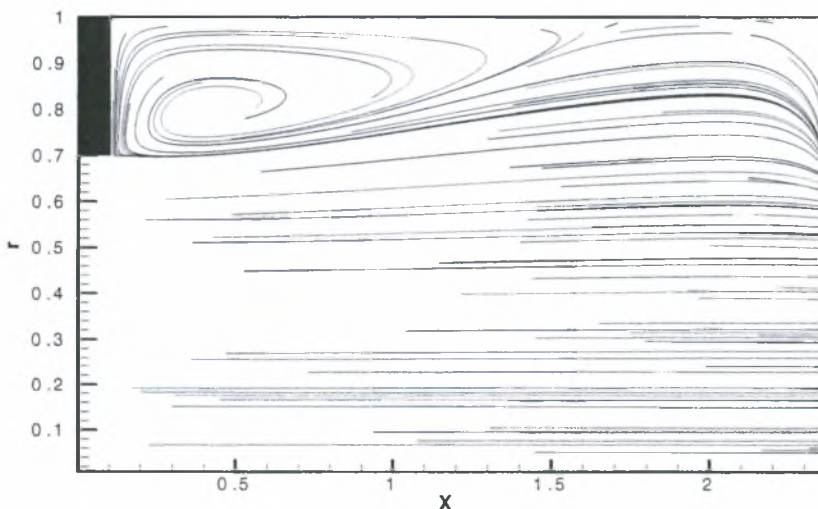
Θα πρέπει επίσης να αναφέρουμε ότι οι γραμμές που προσδιορίζουν τις τροχιές των σωματιδίων δεν ξεκινάνε από την αρχή για το λόγο ότι τα σωματίδια αφήνονται τυχαία στο χώρο και όχι από συγκεκριμένες θέσεις του άξονα και αναπαριστούμε τις τροχιές τους από μια χρονική στιγμή μέχρι μια άλλη. Τα σωματίδια που βρίσκονται στο κέντρο της αρτηρίας έχουν μικρό χρόνο παραμονής, δηλαδή χρειάζονται λίγο χρόνο για να περάσουν από τη μια πλευρά στην άλλη. Ενώ τα υπόλοιπα που παγιδεύονται στις ανακυκλοφορίες καθυστερούν περισσότερο.

### 5.2.1 Περίπτωση με σωματίδια ( $h=0.3, l=0.1, Re=300, L=3\pi/4$ )

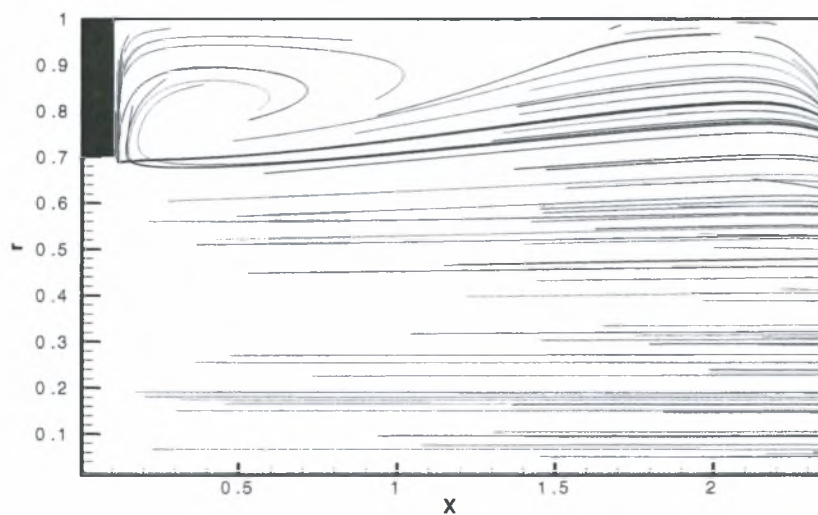
Τα Σχήματα 6.45 έως 6.47 δείχνουν τις τροχιές των αιμοπεταλίων, ερυθροκυττάρων και λευκοκυττάρων, αντίστοιχα.



Σχήμα 6.45 Τροχιές αιμοπεταλίων



Σχήμα 6.46 Τροχιές ερυθρών αιμοσφαιρίων

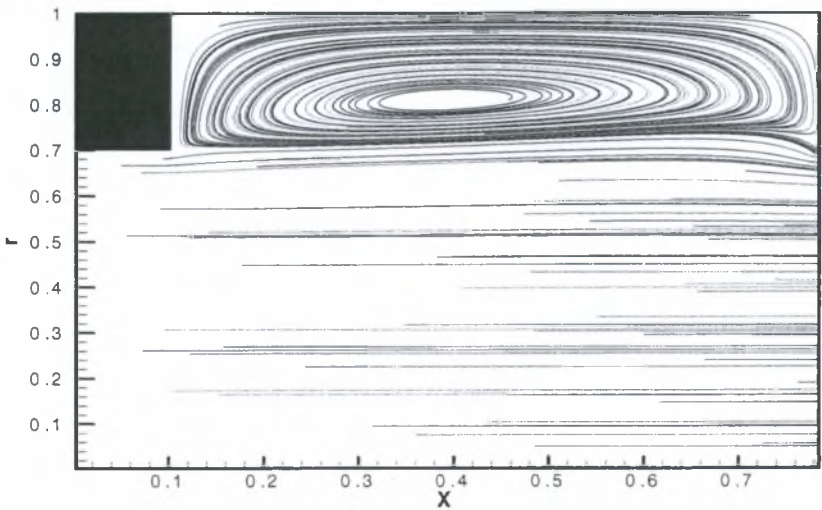


**Σχήμα 6.47**Τροχιές λευκών αιμοσφαιρίων

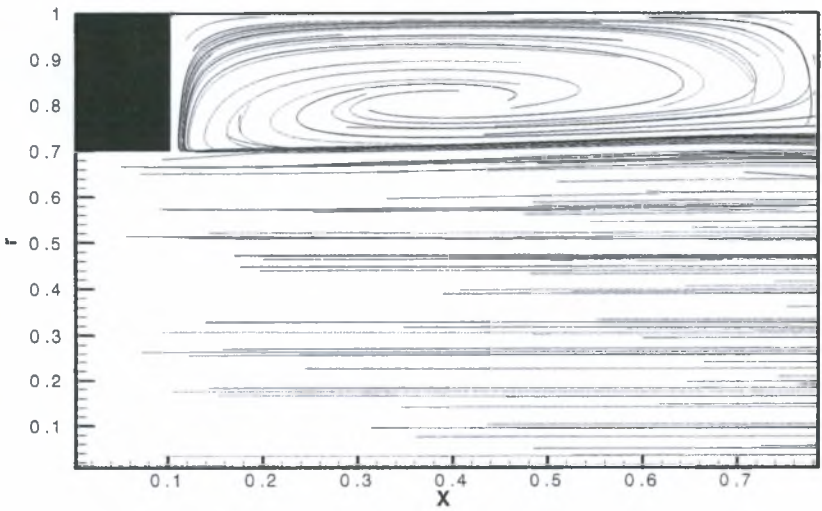


**5.2.2 Περίπτωση με σωματίδια ( $h=0.3, l=0.1, Re=300, L=\pi/8$ )**

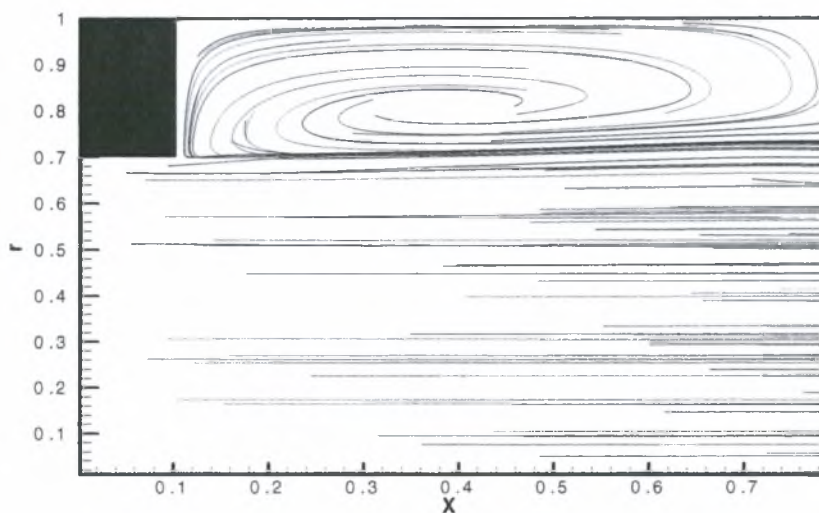
Τα Σχήμα 6.48, 6.49, 6.50 δείχνουν τις τροχιές των αιμοπεταλίων, ερυθροκυττάρων και λευκοκυττάρων αντίστοιχα.



**Σχήμα 6.48**Τροχιές αιμοπεταλίων



**Σχήμα 6.49**Τροχιές ερυθρών αιμοσφαιρίων



**Σχήμα 6.50 Τροχιές λευκών αιμοσφαιρίων**

Παρατηρώντας τα Σχήματα 6.45 έως 6.50 συμπεραίνουμε ότι τα αιμοπετάλια, που είναι και τα πιο μικρά από τα τρία είδη σωματιδίων του αίματος παρασύρονται περισσότερο στις ανακυκλοφορίες σε σχέση με τα ερυθρά και τα λευκά αιμοσφαίρια. Αυτό συμβαίνει γιατί λόγω του μικρού τους μεγέθους έχουν και μικρότερη αδράνεια.

## 6 ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ ΚΑΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάζονται τα συμπεράσματα της μελέτης των περιπτώσεων ροής που περιγράφηκαν στο Κεφάλαιο 5 και γίνονται σχετικές προτάσεις για μελλοντική έρευνα.

### 6.1 Συμπεράσματα

#### 6.1.1 Ροή αίματος μέσα από περιοδικές αρτηριακές στενώσεις

Από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο για την ροή του αίματος όταν αυτή διέρχεται από στενωμένες αρτηρίες μπορούν να διατυπωθούν τα παρακάτω γενικά συμπεράσματα:

1. Υπάρχει επίδραση του αριθμού Reynolds, του ύψους και της περιόδου  $L$  των εμποδίων στο πεδίο ροής.
2. Το μήκος επανακόλλησης της πρώτης ανακυκλοφορίας ( $x_a$ ) μειώνεται όσο ελαττώνεται η περίοδος και ο αριθμός Reynolds.
3. Αυξάνεται το μήκος επανακόλλησης της δεύτερης ανακυκλοφορίας όσο μειώνεται η περίοδος, ενώ με αλλαγές του αριθμού  $Re$  υπάρχουν αυξομειώσεις.
4. Όσο μεγαλύτερο ύψος έχει το εμπόδιο τόσο μεγαλύτερα είναι τα μήκη επανακόλλησης των ανακυκλοφοριών (και της πρώτης και της δεύτερης).
5. Το μήκος του εμποδίου έχει πάρα πολύ μικρές επιδράσεις στα μήκη των ανακυκλοφοριών. Όσο μεγαλύτερο μήκος έχει το εμπόδιο τα μήκη επανακόλλησης των ανακυκλοφοριών ελαττώνονται.

#### 6.1.2 Συμπεράσματα για τις τροχιές των σωματιδίων

Από τα αποτελέσματα που παρουσιάστηκαν για τα σωματίδια (αιμοπετάλια, ερυθρά και λευκά κύτταρα) όταν αυτά διέρχονται από στενωμένες αρτηρίες εξάγονται τα κάτωθι συμπεράσματα:

1. Όσο μικρότερο είναι το μέγεθός τους, εγκλωβίζονται περισσότερα στις ανακυκλοφορίες ενώ τα μεγαλύτερα ξεφεύγουν γιατί έχουν μεγαλύτερη αδράνεια.
2. Τα σωματίδια που βρίσκονται στο κέντρο έχουν μικρότερο χρόνο παραμονής στη ροή.

### 6.1.3 Συμπεράσματα για τον κώδικα

Στον κώδικα που χρησιμοποιήθηκε προστέθηκαν τα παρακάτω στοιχεία:

1. Υπορουτίνα για το εμπόδιο (step)
2. Υπορουτίνες για τον όρο της δύναμης στο δεύτερο μέλος των εξισώσεων Navier-Stokes (forcing term)
3. Υπορουτίνα για τα σωματίδια

## 6.2 Προτάσεις

Στην παρούσα εργασία μελετήθηκε η ροή του αίματος μέσα από περιοδικές αρτηριακές στενώσεις καθώς και οι τροχιές των σωματιδίων που περιέχει (ερυθροκύτταρα, αιμοπετάλια, λευκά αιμοσφαίρια). Ως συνέχεια της παρούσας εργασίας προτείνονται τα εξής:

1. Να μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας το αίμα μη νευτωνικό ρευστό (λαμβάνοντας διάφορους νόμους για το ιξώδες).
2. Να μελετηθούν άλλοι τύποι εμποδίων μη ορθογωνικοί.
3. Μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου τα τοιχώματα της αρτηρίας είναι ελαστικά.
4. Επίσης να υπάρχει αλληλεπίδραση μεταξύ των σωματιδίων καθώς επίσης να είναι και παραμορφώσιμα..
5. Τέλος να προστεθούν και οι άλλες δυνάμεις που επιδρούν στα σωματίδια (ανύψωσης και επιτάχυνσης)

## BIBΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. Y.I. Cho, L.H. Back, D.W. Crawford and R.F. Cuffel, "Experimental study of pulsatile and steady flow through a smooth tube and an atherosclerotic coronary artery casting of man", J. of Biomechanics, Vol. 16, pp. 933-946, 1983.
2. H.A. Hogan and M. Henriksen, "An avaluation of a micropolar model for blood flow through an idealized stenosis", J.of Biomechanics, Vol. 22, pp. 211-218, 1989.
3. C. Tu, M. Deville, L. Dheur and L. Vanderschuren, "Finite-element simulation of pulsatile flow through arterial stenosis" J. Biomechanics, Vol. 25, pp. 1141-1152, 1992.
4. J.M. Siegel, C.P. Markou, D.N. Ku and S.R. Hanson, "A scaling law for wall shear rate through an arterial stenosis", J.of Biomechanical Engineering, Vol. 116, pp. 446-451, 1994.
5. M. Lei, C. Klainsteuer and G.A. Truskey "Numerical investigation and prediction of atherogenic sites in branching arteries", J.of Biomechanical Engineering, Vol. 117, pp. 350-357, 1995.
6. S. Cavalcanti, "Hemodynamics of an artery with mild stenosis", J.of Biomechanics, Vol. 28, pp. 387-399, 1995
7. S. Chakravarthy, A. Datta and P.K. Mandal, "Analysis of nonlinear blood flow in a stenosed flexible artery", Int. J.of Engineering Science, Vol. 33, pp. 1821-1837, 1995.
8. V.P. Srivastava, M. Saxena and R. Srivastava, "Non-newtonian blood flow through stenotic arteries with cells free plasma layer" , ZAMP, 1995.
9. V.P. Srivastava, "Two-phase model of blood flow through stenosed tubes in the presence of a peripheral layer: applications" J.of Biomechanics, Vol. 29, pp. 1377-1382, 1996.
10. G. Rappitsch and K. Perktold, "Computer simulation of convective diffusion processes in large arteries", J. Biomechanics, Vol. 29, pp. 207-215, 1996.
11. G. Rappitsch and K. Perktold, "Pulsatile albumin transport in large arteries: a numerical simulation study", J.of Biomechanics Engineering, Vol. 118, pp. 511-518, 1996.
12. Ch. Tu and M. Deville, "Pulsatile flow of non-newtonian fluids through arterial stenoses", J. of Biomechanics, Vol. 29, pp. 899-908, 1996.
13. D.N. Ku, "Blood flow in arteries", Annual Review of Fluid. Mechanics, Vol. 29, pp. 399-434, 1997.

14. M. Siouffi, V. Deplano and R. Pelissier, "Experimental analysis of unsteady flows through a stenosis", J.of Biomechanics, Vol. 31, pp. 11-19, 1998.
15. V. Deplano and M. Siouffi, "Experimental and numerical study of pulsatile flows through stenosis: wall shear stress analysis", J. of Biomechanics, Vol. 32, pp. 1081-1090, 1999.
16. D. Tang, Ch. Yang and D.N. Ku, "A 3-D thin-wall model with fluid-structure interactions for blood flow in carotid arteries with symmetric and asymmetric stenoses", Computers and Structures, Vol. 72, pp. 357-377, 1999.
17. D. Tang, Ch. Yang, Y. Huang and D.N. Ku, "Wall stress and strain analysis using a three-dimensional thick-wall model with fluid-structure interactions for blood flow in carotid arteries with stenoses", Computers and Structures, Vol. 72, pp. 341-356, 1999.
18. C. Bertolotti and V. Deplano, "Three-dimensional numerical simulations of flow through a stenosed coronary bypass", J.of Biomechanics, Vol. 33, pp. 1011-1022, 2000.
19. K.W. Moser, E.C. Kutter, J.G. Georgiadis, R.O. Buckius, H.D. Morris and J.R. Torczynski, "Velocity measurements of flow through a step stenosis using magnetic resonance imaging", Experiments in Fluids, Vol. 29, pp. 438-447, 2000.
20. H.I. Andersson, R. Halden and T. Glomsaker, "Effects of surface irregularities on flow resistance in differently shaped arterial stenoses", J.of Biomechanics, Vol. 33, pp. 1257-1262, 2000.
21. J.S. Stroud, S.A. Berger and D. Saloner, "Influence of stenosis morphology on flow through severely stenotic vessels: implications for plaque rupture", J.of Biomechanics, Vol. 33, pp. 443-455, 2000.
22. S.A. Berger and L-D Jou, "Flows in stenotic vessels", Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 32, pp. 347-382, 2000.
23. S. Lorthois, P-Y Lagree, J-P Marc-Vergnes, and F. Cassot, "Maximal shear stress in arterial stenoses: application to the internal carotid arteries", J. of Biomech. Engineering, Vol. 122, pp. 661-666, 2000.
24. R. Mittal, S.P. Simmons and H.S. Udaykumar, "Application of large-eddy simulation to the study of pulsatile flow in a modelled arterial stenosis", J. of Biomech. Engineering, Vol. 123, pp. 88-123, 2001.



25. Q. Long, X.Y. Xu, K.V. Rammarine and P. Hoskins, "Numerical investigation of physiologically realistic pulsatile flow through arterial stenosis", J. of Biomechanics, Vol.34, pp. 1229-1242, 2001.
26. M. Siouffi, R. Pelissier, D. Farahifar and R. Rieu, "The effect of unsteadiness on the flow through stenoses and bifurcations", J.of Biomechanics, Vol. 17, No. 5, pp. 299-315, 1984.
27. J.C. Misra and S. Chakravarty, "Flow in arteries in the presence of stenosis", J.of Biomechanics, Vol. 19, No. 11, pp. 907-918, 1986.
28. N. Stergiopoulos, D.F. Young and T.R. Rogge, "Computer simulation of arterial flow with applications to arterial and aortic stenoses", J.of Biomechanics, Vol. 25, pp. 1477-1488, 1992.
29. J.C. Misra, M.K. Patra and S.C. Misra, "A non-newtonian fluid model for blood flow through arteries under stenotic conditions", J.of Biomechanics Vol. 26, pp. 1129-1141, 1993.
30. S. Chakravarty and A. Ghosh Chowdhury, "Reponse of blood flow through an artery under stenotic conditions", Rheologica Acta, Vol. 27, pp. 418-427, 1988.
31. K. Perktold, "On the paths of fluid particles in an axisymmetrical aneurysm", J.of Biomechanics, Vol. 20, pp. 311-317, 1987.
32. R. Verzicco and P. Orlandi, "A finite-difference scheme for three-dimensional incompressible flows in cylindrical coordinates", J. of Computational Physics, Vol. 123, pp. 402-414, 1996.
33. Jungwoo Kim, Dongjoo Kim and Haecheon Choi, "An immersed-boundary finite-volume method for simulations of flow in complex geometries", ", J. of Computational Physics, Vol. 171, pp. 132-150, 2001.
34. N. Benard, D. Coisne, E. Donal and Robert Perrault, "Experimental study of laminar blood flow through an artery treated by a stent implantation: characterisation of intra-stent wall shear stress", J.of Biomechanics, Vol. 36, pp. 991-998, 2003.
35. A.D. Gosman, N.S. Vlachos and J. H. Whitelaw, "Low Reynolds-number pipe flow in the vicinity of three-dimensional obstacles", Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 21, pp. 375-343, 1979.



36. N.S. Vlachos and J. H. Whitelaw, "Low Reynolds-number flow in the vicinity of axisymmetric constrictions", J. of Mechanical Engineering Science, Vol. 21, pp. 73-84, 1979.
37. F.T.Pinho, P.J. Oliveira and J.P. Miranda, "Pressure losses in the laminar flow of shear-thinning power-law fluids across a sudden axisymmetric expansion", J. of Biomechanics, Vol. 36, pp. 991-998, 2003
38. Άγγελος Θ. Παπαιωάννου "Μηχανική των ρευστών", Τόμος 1 και 2, 1993.
39. Σ. Τσαγγάρης, "Βιορευστομηχανική του κυκλοφορικού συστήματος του αίματος", Σημειώσεις, ΕΜΠ, Αθήνα, 1996.
40. Scientific American, "Βιολογία – Γενετική Υγεία", Τεύχος 4, 1999.
41. Μ.Ι. Λελέκη, "Στοιχεία γενικής παθολογίας", Εκδόσεις Πελεκάνος.
42. Ε.Δ. Κατρίτση, Δ. Κελέκη, "Ανατομία της Φυσιολογίας", Εκδ. Ίδρυματος Ευγενίδη.
43. Θ. Ντόλατζας, "Συνοπτική Χειρουργική", Ιατρικές Εκδόσεις Λίτσας.
44. Αλ. Πισίδη "Ανατομική", Εκδόσεις Λύχνος.
45. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, "Στοιχεία Παθολογίας", Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
46. Παιδαγωγικό Ινστιτούτο, "Βιολογία", Εκδόσεις Ο.Ε.Δ.Β.
47. [www.in.gr/health](http://www.in.gr/health)
48. [www.iatroclub.gr](http://www.iatroclub.gr)
49. [www.hygeia.gr](http://www.hygeia.gr)
50. [www.incardiology.gr/kardia/mikri\\_megali.htm](http://www.incardiology.gr/kardia/mikri_megali.htm)
51. <http://health.allrefer.com/pictures-images/c.html>

